Blatt 5a (Erster Teil der Übungen für den 23.11.)

Aussagenlogik

Anwendung des Kompaktheitssatzes. Ein (endlicher oder unendlicher) Graph ist 10-färbbar, wenn man jedem Knoten eine von 10 Farben zuordnen kann, so dass zwei mit einer Kante verbundene Knoten verschiedene Farben haben.

(Spezialfall: Landkarte, wobei jedes Land ein Knoten ist das mit genau den Nachbarländern mit je einer Kante verbunden ist.)

(29) Zeige (mit Hilfe des aussagenlogischen Kompaktheitssatzes): Ein Graph ist 10-färbbar genau dann wenn jeder seiner endlichen Teilgraphen 10-färbbar ist.

Axiomatische Mengenlehre

Hereditär endliche Mengen. (30) (metasprachlich) endliche Mengen: Zeige (mit metasprachlicher induktion): Für jede natürliche Zahl n ist folgendes aus Paarmengen- und Vereinigungsaxiom ableitbar: $\forall(x_1, \dots, x_n)(\exists y)(\forall t)(t \in y \leftrightarrow t = x_1 \vee \dots \vee t = x_n)$. (d.h., es existiert $\{x_1, \dots, x_n\}$).

(31) Eine Menge ist ("metasprachlich" gesehen) hereditär endlich, wenn sie aus der leeren Menge durch eine endliche Iteration von "endlichen Mengenbildungen" (wie in Bsp (30)) konstruiert wird.

Bsp: $0 := \{\}$ (leere Menge), $1 := \{0\}$ (Paarmenge von leerer Menge und leerer Menge), $2 := \{0, 1\}$, die Menge $\{1\}$, und $3 = \{0, 1, 2\}$ sowie $\{0, 2\}$ etc.

Zeige: die Menge der hereditär endlichen Mengen erfüllt alle bisher vorgestellten Axiome (Extensionalität, Paarmenge, Vereinigung, Potenzmenge, Aussonderung,)

Bemerkungen:

- Wir haben "hereditär endlich" hier nur "metasprachlich" definiert, nicht formal. Die formale Definition ist gar nicht so einfach, nur als "Vorgeschmack": Die formale Definition wird sein: x is hereditär endlich wenn die transitive Hülle von x (d.h., $x \cup \bigcup x \cup \bigcup \bigcup x \cup \dots$ endlich ist; die formale definition von "x ist endlich" ist: Es gibt eine bijektion von x auf ein element von ω; und die formale definition von ω ist: Die erste limesordinalzahl (d.h. die limes ordinalzahl die nur nachfolger ordinalzahlen (und 0) enthält), die Definition von Ordinalzahl: eine transitive Menge α so daß $\in$ eine wohlordnung auf α ist.
- Wenn man einmal "endlich" wie oben formalisiert hat, sieht man leicht: Die Menge H der hereditär endlichen Mengen erfüllt also die bereits erwahnten Axiome, aber nicht "es gibt eine unendliche Menge".