Axiomatische Mengenlehre

Erste Einfache Konstruktionen. Wir betrachten die first order Sprache mit dem einzigen 2stelligen Prädikatensymbol $\in$.

Zusätzlich zu den bereits in Blatt 1 betrachteten Axiomen der Mengenlehre (EXT, PAAR, NULL, VER) betrachten wir:

POWER: $(\forall y)(\exists x)(\forall z)(z \subseteq y \to z \in x)$

Dabei ist $z \subseteq y$ Abkürzung für: $(\forall t)(t \in z \to t \in y)$.

Und folgende (unendlich viele) eingeschränkte Aussonderungs(=Komprehensions)axiome (zur Erinnerung: das uneingeschränkte Aussonderungsprinzip ist inkonsistent):

Für eine Formel $\phi(z, A, y_1, \ldots, y_n$ ist der Satz

AUSS$_\phi$: $(\forall y_0 \ldots y_n)(\forall A)(\exists B)(\forall z)(z \in B \leftrightarrow z \in A \wedge \phi(z, A, y_1, \ldots, y_n))$

Aussonderung wird also nur auf eine bereits gegebene Menge A angewendet, um eine Teilmenge B zu bekommen.

Zeige:

(13) Aus einem geeigneten Aussonderungsaxiom folgt der Satz NULL (die Existenz der leeren Menge). (Hinweis: betrachte $\neg z = z$.)

(14) Aus POWER und einem geeigneten Aussonderungsaxiom folgt dass es die Potenzmenge einer Menge x gibt: $(\forall y)(\exists x)(\forall z)(z \subseteq y \leftrightarrow z \in x)$. Mit EXT folgt dass diese Menge x eindeutig ist, wir verwenden dafür die Abkürzung $P(y)$.

(15) Was heißt im vorherigen Satz "wir verwenden die Abkürzung $P(y)$" eigentlich genau? (D.h., wie können wir eine Formel die das zusätzliche Funktionssymbol P verwendet in eine $\in$-Formel umwandeln?) Dasselbe für das Relationssymbol $\subseteq$. Dasselbe für die zweistelligen Funktionssymbole $\{x, y\}$ (Paarmenge) und $\langle x, y\rangle$ (geordnetes Paar).

(16) Zeige: Mit den bisher eingeführten Axiomen (welche brauchen wir genau?) folgt die Existenz des kartesischen Produktes $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. (Formuliere diesen Satz formaler: $(\forall A)(\forall B)(\exists C) \ldots$. (Dabei kann das zusätzliche Funktionssymbol geordnetes Paar verwendet werden. Wie sähe diese Formel als reine $\in$-Formel aus?)

(17) Eine Relation ist eine Menge von Paaren. Gib eine formale Formel $\phi(x)$ an, die ausdrückt daß x eine Relation ist. (Dabei kann das zusätzliche Funktionssymbol geordnetes Paar verwendet werden). Der Definitionsbereich einer Relation x ist $dom(x) = \{a : \exists b : (a, b) \in x\}$, der Bildbereich $im(x) = \{b : \exists a : (a, b) \in x\}$. Zeige: Aus den bisherigen Axiomen (welchen?) folgt: Zu jeder Relation existiert der Definitions- und der Bildbereich. (Hinweis: Ziegler Skriptum).