Ergänzungen zu Blatt 1

Notation.

- In der Mengenlehre wird üblicherweise die natürliche Zahl n mit der Menge $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ identifiziert (und dementsprechend 0 mit der leeren Menge). Den Grund dafür werden Sie bald kennenlernen.
- In der Matthematik wird manchmal A^B oder auch ${}^B A$ für die Menge der Funktionen von B nach A geschrieben.
- In der Mengenlehre wird ω für die natürlichen Zahlen (mit 0) geschrieben.
- Dementsprechend ist 2^ω die Menge aller Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\{0, 1\}$. Wie man leicht sieht ist das die Menge der unendlichen 0-1-Folgen. Äquivalent kann man 2^ω als kartesisches Produkt von ω $(= \mathbb{N})$ vielen Kopien der Menge 2 $(= \{0, 1\})$ ansehen.
- Im unterschied dazu bezeichnet $2^{<\omega}$ die Menge der endlichen 0-1-Folgen. So ist die Folge (0010) mit Länge 4 ein Element von $2^{<\omega}$.
- Für $x \in 2^\omega$ sei $x \restriction n$ die ersten n elemente der Folge (also ist $x \restriction n \in 2^{<\omega}$.)

Der Raum 2^ω. (Die Ausführungen werden im weiteren nicht gebraucht) 2^ω ist eine wichtige "Variante" des Kontinuums (=der reellen Zahlen): Man kann 2^ω nicht nur als Menge als kartesisches Produkt von unendlich vielen Kopien von $\{0, 1\}$ ansehen, sondern:

- Die Produkttopologie des diskreten Raumes $\{0, 1\}$ ist die "kanonische" Topologie auf 2^ω,
- Das Produktmass vom "gleichverteilten" Mass $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = 1/2$ auf $\{0, 1\}$ ist das "kanonische" Mass auf 2^ω.

Im folgenden werden ein paar Eigenschaften des topologischen Raumes 2^ω aufgezählt:

- Für $s \in 2^{<\omega}$ setze $[s] = \{x \in 2^\omega : x \supset s\}$ (d.h., x ist unendliche Folge die s fortsetzt). Dann bildet die Menge $\{[s] : s \in 2^{<\omega}\}$ eine Topologiebasis.
- Die Mengen $[s]$ sind clopen (offen und abgeschlossen), 2^ω ist also nicht nur selbst unzusammenhängend, sondern hat eine Basis aus clopen Mengen (so einen Raum nennt man total unzusammenhängend oder nulldimensional).
- 2^ω ist (T2 und) kompakt (da Produkt von kompakten Räumen, Satz von Tychonoff).
- 2^ω ist metrisch (als abzählbares Produkt metrischer Räume), eine mögliche Metrik ist $d(x, y) = 1/n$, wobei n minimal mit $x(n) \neq y(n)$. Da kompakt, ist 2^ω auch vollständig. (Sieht man auch leicht direkt: Limes punktweise.) Ausserdem ist 2^ω seperabel (hat eine abzählbare dichte Menge, zB die Menge Q die aus allen Folgen besteht die ab irgendwann konstant 0 sind.) Einen vollständig metrisierbaren seperablen Raum nennt man auch "polnisch", 2^ω ist also ein polnischer Raum.
- 2^ω hat keine isolierten Punkte, d.h., 2^ω ist perfekt. (Ein Punkt x heißt isoliert wenn $\{x\}$ offen ist. Allgemeiner ist x isoliert in einer Menge A, wenn es eine Umgebung U von x gibt so dass $\{x\} = A \cap U$.)
- 2^ω ist homöomorph zur Cantormenge C (mit der von $\mathbb{R}$ vererbten Topologie), das ist die Menge die entsteht wenn man aus $[0, 1]$ das mittlere drittel entfernt; von den verbleibenden 2 Intervallen ebenfalls jeweils die mittleren drittel etc.

- Es gilt sogar (Satz von Brouwer): Je zwei kompakte, total unzusammenhängende, metrisierbare, perfekte Räume sind homöomorph (und daher homöomorph zu 2^ω).

Der topologische Raum 2^ω ist (neben ein paar anderen polnischen "Grund"-räumen wie ω^ω, $\mathbb{R}$ oder $[0,1]$) von fundamentaler Bedeutung in der Mathematik.

Das Beispiel (1) sagt nun: (1) Zeige: Wenn A perfekt ist, dann gibt es eine injektive, stetige Abbildung f von 2^ω (mit der Produkt-Topologie) nach $\mathbb{R}$ so dass das Bild in A liegt. Insbesondere hat A die Kardinalität von $\mathbb{R}$.

Zum Beweis wählt man erst mal zwei verschiedene Punkte $a_{(0)}$ und $a_{(1)}$ in A, und zwei disjunkte abgeschlossene Umgebungen $U_{(0)}$ von $a_{(0)}$ und $U_{(1)}$ von $a_{(1)}$. Zusätzlich fordern wir dass die Durchmesser von $U_{(0)}$ und $U_{(1)}$ maximal $1/3$ sind.

Beginnend von $A \cap U_{(0)}$ statt A wiederholen wir die Konstruktion, (hier verwenden wir daß A perfekt ist, dass $a_{(0)}$ also nicht isoliert ist, es gibt also sicher zwei verschiedene Punkte in $A \cap U_{(0)}$) und bekommen so $a_{(00)}$ und $a_{(01)}$ mit $U_{(00)}$ und $U_{(11)}$, diesmal mit Durchemsser maximal $1/3^2$.

Für jedes $s \in \omega^{<\omega}$ bekommen wir so mit Induktion $a_{s\frown 0}$, $a_{s\frown 1}$, $a_{U\frown 0}$, $U_{s\frown 1}$.

Sei $x \in 2^\omega$. Dann ist $X := \bigcap_{n\in\omega} U_{x\restriction n}$ ein schnitt von abgeschlossenen beschränkten Intervallen, nach dem Intervallschachtelungsprinzip enthält X also genau einen Punkt a_x. Wir definieren die Funktion $F : 2^\omega \to A$ durch $x \mapsto a_x$.

Es sollte nun recht einfach sein zu zeigen: F ist injektiv, das Bild von F ist tatsächlich in A, und F ist stetig.

Cantor Bendixon. (2) Gegeben die abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}$, sei A' die Menge der Punkte in A die nicht isoliert sind. Zeige: A' ist abgeschlossen.

(Hinweis: Wenn x isoliert, dann gibt es U_x offen so dass $A \cap U_x = \{x\}$. Statt x ziehe U_x von A ab.)

Was ist A' für

- $A_\infty = [0,1]$?
- $A_1 = \{0\}$?
- $A_2 = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$?
- $A_3 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{1/n + 1/n(A_2)\}$? (Dabei bezeichnet $r \cdot B = \{rb : b \in B\}$, analog für $r + B$.

Der Rang einer abgeschlossenen Menge A sei das minimale α (falls so eine Zahl exisitiert), so daß die α-te iteration der $A \mapsto A'$ operation die Leere Menge ergibt. Welche Ränge haben die obigen Mengen?

Zeige: Wenn es eine Menge A mit Rang α gibt, dann gibt es auch eine Menge B mit Rang $\alpha + 1$. (Hinweis: Nimm an dass A beschränkt ist. (Ist wegen spaeterer Überlegungen möglich). Dann B Wie A_2, nur statt der einzelnen Punkte bei $1/n$ jeweil (immer kleiner werdende Kopien von) A verwenden).

Wenn es Mengen A_n mit Rang α_n gibt (für $n \in \mathbb{N}$), dann gibt es auch eine Menge B deren Rang definiert ist und zumindest so groß ist wie jedes α_n. (Hinweis: Wie oben, nimm an jedes A_n beschränkt. Statt $1/n$ verwende A_n.)

(3) Gegeben die abgeschlossene Mange A. Definiere $A^0 := A$, $A^{\alpha+1} = (A^\alpha)'$ und $A^\delta = \bigcap_{\alpha<\delta} A^\alpha$ für Limeszahlen δ. Zeige: Es gibt ein β so daß $A^\beta = A^{\beta+1}$ (dann ist A^β also entweder leer oder perfekt). Darüberhinaus ist β abzählbar.

(Hinweis: Das abzählbar ist mit "naiver Mengenlehre" vermutlich etwas unheimlich, weil wir nicht so recht wissen was genau wir tun dürfen und was nicht... Aber dafür werden wir ja auch axiomatische Mengenlehre einführen.)

(4) Zeige: Jede abgeschlossene Menge A ist entweder abzählbar oder enthält eine perfekte Menge (und ist dann insbesondere so groß wie $\mathbb{R}$).

(Hinweis: folgt leicht aus (3))