Naive Mengenlehre

Cantor-Bendixon-Algorithmus. Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$ heisst *perfekt*, wenn sie nichtleer und abgeschlossen ist und keine isolierten Punkte enthält (d.h., für alle $x \in A$ und $\epsilon > 0$ gibt es ein $y \in A$ mit $|x - y| < \epsilon$).

(1) Zeige: Wenn A perfekt ist, dann gibt es eine injektive, stetige Abbildung f von 2^ω (mit der Produkt-Topologie) nach $\mathbb{R}$ so dass das Bild in A liegt. Insbesondere hat A die Kardinalität von $\mathbb{R}$.

(2) Gegeben die abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}$, sei A' die Menge der Punkte in A die nicht isoliert sind. Zeige: A' ist abgeschlossen. Was ist A' für

- $A_\infty = [0, 1]$?
- $A_1 = \{0\}$?
- $A_2 = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$?
- $A_3 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{1/n + 1/n(A_2)\}$? (Dabei bezeichnet $r \cdot B = \{rb : b \in B\}$, analog für $r + B$.

Der Rang einer abgeschlossenen Menge A sei das minimale α (falls so eine Zahl exisitiert), so daß die α-te iteration der $A \mapsto A'$ operation die Leere Menge ergibt. Welche Ränge haben die obigen Mengen? Zeige: Wenn es eine Menge A mit Rang α gibt, dann gibt es auch eine Menge B mit Rang $\alpha + 1$. Wenn es Mengen A_n mit Rang α_n gibt (für $n \in \mathbb{N}$), dann gibt es auch eine Menge B deren Rang definiert ist und zumindest so groß ist wie jedes α_n.

(3) Gegeben die abgeschlossene Mange A. Definiere $A^0 := A$, $A^{\alpha+1} = (A^\alpha)'$ und $A^\delta = \bigcap_{\alpha<\delta} A^\alpha$ für Limeszahlen δ. Zeige: Es gibt ein β so daß $A^\beta = A^{\beta+1}$ (dann ist A^β also entweder leer oder perfekt). Darüberhinaus ist β abzählbar.

(4) Zeige: Jede abgeschlossene Menge A ist entweder abzählbar oder enthält eine perfekte Menge (und ist dann insbesondere so groß wie $\mathbb{R}$).

Axiomatische Mengenlehre

Erste Einfache Konstruktionen. Wir betrachten die first order Sprache mit dem einzigen 2stelligen Prädikatensymbol $\in$.

(5) Leite (aus der leeren Satzmenge) ab: $\{y : y \notin y\}$ ist keine Menge; d.h.:

$$\neg(\exists x)\,(\forall y)\,(y \in x \leftrightarrow y \notin y).$$

Wir betrachten folgende Sätze:

EXT: $(\forall x)\,(\forall y)\,((\forall t(t \in x \leftrightarrow t \in y)) \rightarrow x = y))$ (zwei Mengen mit denselben Elementen sind identisch).

PAAR: $(\forall x)\,(\forall y)\,(\exists z)(\forall t \in z(t = x \vee t = y) \wedge x \in z \wedge y \in z)$ (zu je zwei Elementen gibt es eine Paarmenge)

NULL: $(\exists x)\,(\forall t)\,(t \notin x)$ (es gibt die leere Menge)

VER: $(\forall x)\,(\exists y)\,((\forall a, b)(a \in b \wedge b \in x \rightarrow a \in y) \wedge (\forall a)(a \in y \rightarrow (\exists b)a \in b \wedge b \in x))$ (es exisitiert die Vereinigungsmenge y von x)

(6) Zeige: Aus EXT und PAAR folgt nicht NULL. (Hinweis: ein einelementiges Modell genügt.)

(7) Zeige: Aus EXT und PAAR folgt: Zu jedem x gibt es das (eindeutige) singleton $\{x\}$.

(8) Zeige: Aus EXT und PAAR folgt: Die Paarmenge $\{x, y\}$ ist eindeutig. (Formuliere diese Aussage exakter.)

(9) Das geordnete Paar $< x, y >$ ist definiert als $\{x, \{x, y\}\}$. Zeige: EXT und PAAR impliziert: $(\forall x, x', y, y')(< x, y >=< x', y' >\leftrightarrow (x = x' \wedge y = y'))$.

(10) Zeige: EXT und VER impliziert dass die Vereinigungsmenge y von x eindeutig ist. Wir schreiben dafür auch $\bigcup x$.

(11) Zeige: EXT und PAAR und VER impliziert dass es $x \cup y$ gibt, d.h. $(\forall x, y)\ (\exists z)\ ((\forall t \in z)(t \in x \vee t \in y) \wedge (\forall t \in x)t \in z \wedge (\forall t \in y)t \in z)$.

(12) Das universellen Komprehensions-Schema postuliert zu jeder Formel $\phi(x)$ die Existenz der Menge $\{x : \ \phi(x)\}$. Formaler: Die Satzmenge UKOMPR besteht aus den Sätzen

$$(\forall y_1 \dots y_n)(\exists z)(\forall x)x \in z \leftrightarrow \phi(x, y_1, \dots, y_n)$$

für jede Formel $\phi(x, y_1, \dots, y_n)$. Zeige dass die Satzmenge UKOMPR inkonsistent ist. (Hinweis: Beispiel 5 liefert ein konkretes inkonsistentes element von UKOMPR)