Beispiel Pruefungsangaben Grundbegriffe, Praedikatenlogik

Eine prädikatenlogische Formel φ heißt erfüllbar, wenn es eine Struktur $\mathcal{M}$ gibt mit $\mathcal{M} \models \varphi$, sonst unerfüllbar. φ heißt gültig, wenn $\models \varphi$, d.h. wenn für jede Struktur gilt $\mathcal{M} \models \varphi$.
Der folgende Satz ist

	gültig	nicht gültig, aber erfüllbar	unerfüllbar
$(\forall x \forall y\, R(x,y)) \to (\forall y \forall x\, R(x,y))$	☐	☐	☐
$(\forall x \exists y\, R(x,y)) \to (\exists y \forall x\, R(x,y))$	☐	☐	☐
$(\forall x\, R(x, f(x))) \to (\forall x \exists y\, R(x,y))$	☐	☐	☐
$[\exists x\, (f(x) = 0 \to f(x+1) = 0)] \to$ $[(\exists x f(x) = 0) \to (\exists x f(x+1) = 0)]$	☐	☐	☐
$[\forall x\, (x \geq 0 \vee x \leq 0)] \to$ $[(\forall x\, x \geq 0)) \vee (\forall x\, x \leq 0)]$	☐	☐	☐
$[\exists x\, (P(x) \vee R(x))] \to$ $[(\exists x P(x)) \vee (\exists x R(x))]$	☐	☐	☐

Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein (für eine τ-Struktur $\mathcal{M}$, eine **beliebige** τ-Satzmenge Σ, eine **vollständige** τ-Satzmenge Ξ, und für τ-Sätze φ und ψ):

	wahr	falsch
$\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ genau dann wenn gilt: ($\mathcal{M} \models \varphi$ impliziert $\mathcal{M} \models \psi$).	☐	☐
$\Sigma \models \varphi \to \psi$ genau dann wenn gilt: ($\Sigma \models \varphi$ impliziert $\Sigma \models \psi$).	☐	☐
$\Xi \models \varphi \to \psi$ genau dann wenn gilt: ($\Xi \models \varphi$ impliziert $\Xi \models \psi$).	☐	☐

Sei $\tau_0 = \{\}$ (leere Signatur), $\tau_1 = \{<\}$, (2stelliges Relationssymbol), $\tau_r = \{<, R\}$ (beides 2stellige Relationssymbole), $\tau_f = \{<, f\}$ (f einstelliges Funktionssymbol), $\bar{\tau} = \{S\}$ (einstelliges Relationssymbol).
Sei ϕ_0 der Satz der besagt, dass das Universum 10 Elemente hat. Sei ϕ_1 der Satz der besagt, daß das Universum, durch $<$ linear geordnet ist.
Sei ϕ_2 der Satz der besagt, daß f eine Bijektion des Universums ist.
Sei $\Sigma_0 = \{\phi_0\}$, $\Sigma_1 = \{\phi_0, \phi_1\}$, und $\Sigma_2 = \{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$. Wieviele Modelle der entsprechenden Signatur und Satzmengen gibt es modulo Isomorphie?

	0	1	10	2^{10}	10^{10}	10!	$2^{\binom{10}{2}}$	2^{100}	abzählbar unendlich	über-abzählbar
τ_1-Modelle von Σ_1	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
τ_r-Modelle von Σ_1	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
τ_f-Modelle von Σ_1	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
τ_f-Modelle von Σ_2	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
τ_0-Modelle von $\emptyset$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
abzählb. unendl. τ_0-Modelle von $\emptyset$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
abzählb. unendl $\bar{\tau}$-Modelle von $\emptyset$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Welche der folgenden Sätze gilt allgemein (für abzählbare Signatur):

- ☐ Wenn Σ beliebig grosse endliche Modelle hat, dann auch ein unendliches.
- ☐ Wenn Σ ein unendliches Modell hat, dann auch beliebig grosse endliche.
- ☐ Wenn Σ ein unendliches Modell hat, dann auch ein überabzählbares.
- ☐ Wenn Σ ein überabzählbares Modell hat, dann auch ein abzählbar unendliches.
- ☐ Wenn jede endliche Teilmenge von Σ ein unendliches Modell hat, dann hat Σ ein überabzählbares Modell.

Eine Eigenschaft P des Universums is impliziert durch einen Satz ϕ (oder die Satzmenge Σ), wenn ϕ (bzw Σ) konsistent ist und jedes Modell von ϕ (bzw Σ) die Eigenschaft P hat.
Eine Eigenschaft P des Universums is beschreibbar durch einen Satz ϕ (oder die Satzmenge Σ), wenn genau die Modelle von ϕ (bzw Σ) die Eigenschaft P haben.
Welche der folgenden Eigenschaften P können durch einen Satz (eine Satzmenge) beschrieben oder zumindest impliziert werden:
Fixiere zB die Signatur $\tau = \{e, \cdot, f, <\}$
Es sind **alle** richtigen Aussagen anzukreuzen.

	impl. aus Satzmenge	impl. aus Satz	beschr. d. Satzmenge	beschr. d. Satz	weder noch
Das Universum ist endlich	☐	☐	☐	☐	☐
Das Universums ist unendlich	☐	☐	☐	☐	☐
Das Universum ist eine Gruppe	☐	☐	☐	☐	☐
Das Universum ist eine endliche Gruppe	☐	☐	☐	☐	☐
Das Universum ist eine unendliche Gruppe	☐	☐	☐	☐	☐
Das Universum ist abzählbar unendlich	☐	☐	☐	☐	☐
Das Universum ist isomorph zu $(\mathbb{Q}, <)$	☐	☐	☐	☐	☐
f ist eine Bijektion des Universums	☐	☐	☐	☐	☐