PS Logik 1, WS 2009
Blatt 6, 2010-01-25

Dichte Lineare Ordnungen. Sei T die theorie der dichten linearen Ordnungen ohen Endpunkte. Genauer: T enthält die folgenden Sätze der Sprache $\{<\}$: $<$ is totale Ordnung (transitiv, antisymmetrisch, total), es gibt keine Endpunkte $(\forall y \exists x, z : x < y, y > z)$, die Ordnung is dicht $(\forall x < z \exists y : x < y < z)$.

(1) Seien M und N Modelle von T. Zeige: M und N sind isomorph.

Hinweis: Back and forth: Zeige: Für jeden endlichen partiellen Isomorphismus f von M nach N und für jedes $m \in M$, $n \in N$ läßt sich f zu einem größeren endlichen partiellen Isomorphismus g erweitern so daß $m \in \mathrm{dom}(g)$ und $n \in \mathrm{im}(g)$.

(2) Es gilt also: T hat nur ein unendliches Modell. Folge daraus: T ist vollständig.

(3) Zeige: T hat mehr als ein Modell der Größe $2^{\aleph_0}$. Hinweis: Zeige: $\mathbb{R}$ "gefolgt von" $\mathbb{Q}$ ist nicht isomorph zu $\mathbb{R}$.

Vektorräume. Signatur: $+$, 0, sowie $\cdot q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Sei T die Menge der Vektorraumaxiome. Insbesondere: für $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a \cdot b = c$ ist "$\forall x : (x \cdot a) \cdot b = x \cdot c$" ein Axiom (dabei sind $\cdot a$, $\cdot b$ und $\cdot c$ drei verschiedene einstellige Funktionssymbole).

Zeige: (4) M ist ein Modell von T genau dann wenn M ein Vektorraum über Q ist.

(5) Es gibt abzählbar viele nichtisomorphe abzählbare Modelle. Hinweis: Q, Q^2, … Warum sind die nicht isomorph?

(6) Es gibt genau ein Modell der Größe $2^{\aleph_0}$. Hinweis: Seien M ein zwei Vektorraum über Q der Größe $2^{\aleph_0}$. Wie groß ist die (Hamel)basis von M? Zwei VR mit Basen der selben Größe sind isomorph.

(7) Insbesondere: T ist vollständig. (Man kann also "es gibt zwei linear unabhängige Vektoren" nicht formulieren.)

Zahlentheorie. Sei T die Menge der Sätze, die in $\mathbb{N}$ gelten (mit der Signatur $+, \cdot, <, 0, 1$).

(8) Zeige: Es gibt überabzählbar viele abzählbare Modelle.

Hinweis: (a) Nichtstandard Modelle: Erweitere Signatur um neues Konstantensymbol c. Erweitere T um $c > 0$, $c > 1$, etc. Aus dem Kompaktheitssatz folgt, daß T' konsistent ist. Zeige: Ein T' modell ist nicht isomorph zu $\mathbb{N}$.

(b) Sei A eine unendliche Teilmenge der Primzahlen (es gibt überabzählbare viele solche Mengen). Ein nonstandardmodell M "realisiert" A, wenn es ein (nichtstandard) $x \in M$ gibt so daß für jede (standard) Primzahl p (d.h.: $p = 1 + 1 + \cdots + 1$ ist eine Primzahl) gilt: $M \vDash p|x$ gdw $x \in A$. Zeige: für jedes A gibt es ein (abzählbares) Nonstandardmodell M daß A realisert. (Hinweis: Wider Kompaktheitssatz, schreibe alle Teilbarkeiten und nicht-Teilbarkeiten in die Satzmenge)

(c) Zeige: Wenn M eine Menge A realisert und N nicht, dann sind M und N nicht isomorph. Zeige: Jedes abzählbare modell M realisiert nur abzählbar viele Mengen A. Folge daraus: Es gibt überabzählbar viele paarweise nichtisomorphe Nonstandardmodelle.