PS Logik 1, WS 2009
Blatt 4, 2009-11-16

Rechne 3–4 der folgenden Beispiele:

(1) Mehr zu Verbänden.

- Sei $A, \leq$ eine partielle ordnung so daß je zwei Elemente a, b eine kleinste obere Schranke o und eine größte untere Schranke u haben. Zeige: Mit der natürlichen Definition (d.h., $a \wedge b := u$ etc) ist A ein Verband, und die durch den Verband definierte partielle Ordnung ist genau $\leq$.
- Sind die Folgenden Mengen (geordnet durch Inklusion) Verbände: Die Menge aller Teilgruppen einer (fixen) Gruppe G; die Menge aller normalen Teilgruppen von G; die Menge aller Ideale eines (fixen) Ringes R; die Menge aller Teil-Vektorräume eines (fixen) Vektorraums V.

(2) Boolesche Algebra. Eine Boolesche Algebra ist ein Verband mit zusätzlich den Konstanten 0 und 1 und der einstelliogen Operation $'$ (Komplement), so daß gilt:

- $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 1 = 1$,
- $x \wedge x' = 0$, $x \vee x' = 1$.
- $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
- $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Zeige:

- $P(X)$ (die Potenzmenge von X) mit den üblichen Operationen Schnitt, Vereinigung, leere Menge, X, und Komplement (relativ zu X) ist eine BA.
- Im einem späteren Beispiel wird gezeigt: Jede BA B ist injektiv einbettbar in die BA $P(X)$ für ein X. Zeige: Nicht jede BA ist isomorph zu $P(X)$ für ein X. (Hinweis: Zeige: es gibt abzählbar unendliche BAs)
- Sei B eine BA, definiere $A \Delta B$ als $(a \wedge b') \vee (b \wedge a')$. Zeige: $(B, \Delta, \wedge)$ ist ein Ring.
- Eine Teilmenge I von B ist ein ideal, wenn sie ein Ideal im entsprechenden Ring ist (oder äquivalent: wenn für alle $a \in I$ und $b \leq a$ auch $b \in I$ und wenn $a \vee b \in I$ für alle $a, b \in I$). Sei I Ideal auf der BA B. Definiere die Quotientenalgebra B/I und zeige daß diese Quotientenalgebra wieder BA ist.
- Eine Teilmenge A eine BA ist eine Antikette, wenn $a \wedge b = 0$ for all $a, b \in A$. Eine Antikette ist maximal, wenn es keine echte Obermenge $A' \supset A$ gibt die Antikette ist. Zeige: Eine Antikette ist maximal genau dann wenn 1 das einzige Element ist, das über allen Elementen der Antikette liegt (in der durch die BA-Operationen bestimmten Ordnung).
- Eine BA heißt ccc, wenn jede Antikette endlich oder abzählbar unendlich ist. Ein Ideal I heißt ccc, wenn wenn B/I ccc ist. Eine BA B heißt σ-vollständig (oder manchmal auch σ Algebra), wenn jede abzählbare Teilmenge von B ein supremum und ein infimum hat. Eine BA B heißt vollständig, wenn jede Teilmenge ein supremum (und ein infimum) hat. Zeige: Sei B eine σ-vollständige Algebra, und I ein ccc ideal. Dann ist B/I vollständig.
- Sei I die Menge der Lebesgue-Nullmengen. B_0: Alle Teilmengen von $\mathbb{R}$, B_1: die Lebesgue-meßbaren Mengen, B_2: die Borelmengen. Zeige: I ist ideal in

B_0, B_1 und B_2. Welche der folgenden Mengen (mit der Teilmengenbeziehung) bzw Quotienten ist (σ)-vollständig bzw ccc: B_0, B_0/I, B_1, B_1/I, B_2, B_2/I.
- $a \in B$ heißt Atom, wenn $a \neq 0$ und für jedes $b \in B$ gilt: wenn $0 \leq b \leq a$, dann $b = 0$ oder $b = a$. Eine BA heißt atomfrei, wenn sie keine Atome hat. Welche der obigen BAs ist atomfrei?

(3) Boolesche Algebra: Topologie. Eine Menge a eines toplogischen Raums heißt clopen, wenn sie sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Zeige: die clopen Mengen bilden eine BA (mit den üblichen Mengenoperationen). Ist diese BA σ-vollständig?

Eine Menge a eines toplogischen Raums heißt regulär offen (ro), wenn $(\bar{a})^\circ = a$. Zeige: Die ro Mengen bilden eine vollständige BA. (Bezüglich welcher Operationen?)

0.1. **(3b) Einbettungen von p.o.s in B.A.s.** Sei P eine partielle Ordnung. Dann kann P mit der Ordnungs-Topologie versehen werden: Für $p \in P$ setze $N_p = \{q : q \leq p\}$. Die Mengen N_p bilden eine Topologiebasis. Sei B die (vollstäbdige) B.A. der der ro-Teilmengen von P. Definiere $i : P \to B$ durch $p \mapsto \bar{N_p}^\circ$. Wir definieren $p \perp q$ durch: Es gibt kein $r \in P$ so daß $r \leq p$ und $r \leq q$. P heißt seperativ, wenn es für all $p, q \in P$ mit $p \nleq q$ ein r gibt mit $r \leq p$ und $r \perp q$.

Zeige:
- $i(p) \neq 0$ für alle $p \in P$.
- Das Bild von i ist dicht, d.h. für all $a \neq 0$ in B gibt es ein $p \in P$ so daß $i(p) \leq a$.
- Wenn $q \leq p$, dann $i(q) \leq i(p)$.
- $q \perp p$ gdw $i(q) \perp i(p)$.
- Wenn P seperativ ist, dann ist i injektiv, und $q \leq p$ gdw $i(q) \leq i(p)$.

Zusammenfassend: Jede seperative p.o. ist dichte Teilordnung einer vollständigen-BA Ordnung.

(4) Boolesche Algebra: Stonescher Darstellungssatz. Sei B eine BA. Ein Filter ist das Dual eines Ideals (z.B: $F \subseteq B$ ist Filter, wenn $\{a' : a \in F\} \subseteq B$ ein Ideal ist). Triviale Beispiele für Filter sind die prinzipalen Filter $\{b \geq a\}$ für ein fixes $a \in B$.

Ein Ultrafilter ist ein maximaler Filter (d.h. ein Filter, der maximal ist in der Menge aller Filter (ohne dem trivialen Filter, der die ganze Algebra ist)). Ein prinzipaler Filter zum Element a ist Ultrafilter gdw a ein Atom ist.

Sei $S(B)$ die Menge aller Ultrafilter auf B. Auf $S(B)$ kann man eine Topologie generieren duch die Topologiebasis die aus folgenden Mengen besteht

$$X_a = \{U \in S(B) : a \in U\} \text{ (für } a \in B).$$

Zeige:
- Die Menge der X_a ist tatsächlich eine Topologiebasis (in unserem Fall gilt sogar: $X_{a_1} \cap X_{a_2} = X_{a_3}$, für welches a_3?)
- Jedes X_a is clopen. (Was ist $S(B) \setminus X_a$?)
- Einen Raum mit clopen Topologiebasis nennt man auch total unzusammenhängend. $S(B)$ ist also total unzusammenhängend.
- Zeige: $S(B)$ ist kompakt (inkl. T2). Hinweis: $S(B)$ ist abgeschlossener Teilraum des kompakten Raumes 2^B (mit der Produkttopologie), der selbst kompakt ist.

- Zeige: Die clopen Mengen eines Topologischen Raumes bilden eine Mengen-Algebra (d.h. eine Boolesche Algebra mit den normalen Mengen-Operationen).
- Zeige $a \mapsto X_a$ ist ein injektiver BA-Homomorphismus (sogar: Isomorphismus) von der BA B in die Mengen-Algebra der clopen Mengen von $S(B)$. (Hinweis fuer Isomorphismus: aus kompakt und total unzusammenhängend folgt: Jede clopen Menge ist endliche Vereinigung von Basismengen.)

(4b) Stone-Cech Kompaktifizierung für diskrete X. Sei X eine Menge. mit der diskreten Topologie. Sei B die Boolescha Algebra aller Teilmengen von X. Die Stone-Cech Kompaktifizierung von X ist $S(B)$. Die Wir können X in $S(B)$ einbetten indem wir $x \in X$ den prinzipalen Ultrafilter $A \subseteq X : A \ni x$ zuordnen. Auf diese Weise ist X eine Teilmenge von $S(B)$. Zeige: X ist dicht in $S(B)$, jeder Punkt von X ist isoliert in $S(B)$, und jede Abbildung $f : X \to K$ in einen kompakten Raum K kann eindeutig zu einer stetigen Abbildung $f' : S(B) \to K$ erweitert werden.

(5) Boolesche Algebra, Back and forth. Seien B_1, B_2 beides atomfreie abzählbare Boolesche Algebren. Zeige: B_1 und B_2 sind isomorph.

Hinweis: Sei $B_1 = \{a_0, a_1, \dots\}$ und $B_2 = \{b_0, b_1, \dots\}$. Konstruiere eine aufsteigende Kette partielleer isomorphismen f_n von B_1 nach B_2, stelle in Schritt $2n$ sicher daß $a_n \in \mathrm{dom}(f_n)$ und im Schritt $2n+1$ daß $b_n \in \mathrm{im}(f_n)$.

(6) Rekursionstheorie: Primitive Rekursion.

- Ex 2.5.3: Zeigen Sie dass Plus und Mal primitiv rekursiv sind.
- Ex 2.5.4(12): Zeigen Sie dass die Funktion die n auf die n-te Primzahl abbildet primitiv rekursic ist.

(7) Rekursionstheorie: Turingmaschinen.

- Ex 2.5.7(4): Geben sie "tidy" Progeramme fuer $\chi(\psi_1(x), \psi_2(x))$ an, wenn Sie bereits ''tidy" Programme fuer χ, ψ_1 und ψ_2 zur Verfügung haben.
- Ex 2.5.13: Zeigen Sie dass die BusyBeaver Funktion $bb(n)$ nicht berechenbar ist. $bb(n)$ sei der maximale output, den ein Turing programm mit höchstens n Zusatänden (=Programmzeilen) auf Input 0 liefern kann. (Dieses Beispiel ist vielleicht an dieser Stelle etwas zu schwierig...)