PS Logik 1, WS 2009
Blatt 3, 2009-11-02

(1) Ein logisches Rätsel. On a certain island live 789 persons, all well acquainted with one another, of whom 34 have blue eyes and the rest brown eyes. It is an absolute taboo on this island to convey any information on eye color, and mirrors are unknown. It is furthermore a horrible shame to have blue eyes, and it is an absolutely accepted rule that as soon as a person becomes aware that his/her eyes are blue then he/she must commit suicide at the next midnight. One day a missionary arrives at the island and proclaims ät least one of you has blue eyes". What is going to happen?

Bemerkung: Natürlich gehen wir davon aus daß dem Missionar geglaubt wird, daß alle Beteiligten ausreichend intelligent sind etc.

Hinweis: Was passiert wenn genau ein Bewohner blaue Augen hat? Zwei?

(2) Eine Anwendung des Kompaktheitssatzes der Aussagenlogik. Eine "Karte" sei eine (möglicherweise unendliche) Menge L (genannt "Länder") mit einer zweistelligen symmetrischen irreflexiven Relation E ("xEy" heißt: das Land x ist dem Land y benachbart).

Eine Teilmenge $L' \subseteq L$ definiert auf natürliche Weise eine Teilkarte (wir setzen $E' = E \cap L' \times L'$).

Eine Karte ist 3-färbbar, wenn es eine Funktion $f : L \to \{0, 1, 2\}$ gibt, so daß $f(x) \neq f(y)$ für xEy.

Zeige: Eine Karte ist 3-färbbar, genau dann wenn jede endliche Teilkarte 3-färbbar ist.

(3) Universelle Algebra, Teil 1. Wenn A eine Algebra ist, ist auf natürliche Weise die Produktalgebra $A \times A$ definiert (zur selben Signatur).

Eine Kongruenzrelationen auf der Algebra A ist eine Äquivalenzrelation, die gleichzeitig Unteralgebra der Produktalgebra $A \times A$ ist.

Beweise den allgemeinen Homomorphiesatz: Homomorphe Bilder einer Algebra A entsprechen genau den Kongruenzrelationen auf A.

(4) Universelle Algebra, Teil 2. Ein Verband ist eine Algebra zur Signatur $\cup, \cap$ (jeweis 2stellig) die folgende Eigenschaften hat:

- $x \cap y = y \cap x; \quad y \cap x = x \cap y.$
- $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z; \quad x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z.$
- $x \cap x = x; \quad x \cup x = x.$
- $x = x \cup (x \cap y); \quad x = x \cap (x \cup y).$

In einem Verband ist $x \leq y$ definiert durch $x \cap y = x$.

Zeige: das definiert eine partielle Ordnung (reflexiv, antisymmetrisch und transitiv).

Ein Verband heißt vollständig, wenn es für jede nichtleere Teilmenge eine kleinste obere und eine größte untere Schranke gibt.

Zeige: die Kongruenzrelationen auf A bilden einen vollständigen Verband. (Mit welchen (natürlichen) Funktionen?)