1. NAIVE MENGENLEHRE

1.1 KARDINALZAHLEN: DEF., SCHRÖDER BERNSTEIN, EINFACHE BEISPIELE

DEF: (•) Zwei Mengen A, B sind gleich groß, $|A| = |B|$, wenn $\exists f: A \to B$ bijektiv. $|A|$ wird Kardinalität oder Kardinalzahl von A genannt.

(•) A ist kleiner (gleich) B, $|A| \leq |B|$, wenn $\exists f: A \to B$ inj.

Bsp: (•) $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \setminus \{0\}|$ mit $f: n \mapsto n+1$

(•) $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$ für $2\mathbb{N} = \{2 \cdot n : n \in \mathbb{N}\}$, Bew: Ü

(•) Allg.: Wenn $A \subseteq \mathbb{N}$ unendl., dann $|A| = |\mathbb{N}|$, Bew: Ü

Wir sehen: anders als bei endlichen Mg kann eine echte TM einer unendlichen Menge gleich groß wie die ursprüngliche Menge sein.
Hilberts Hotel: unendlich viele Zimmer mit Nummer $0, 1, 2, \ldots$ alle Zimmer belegt. Neuer Gast kommt in 0, Gast aus n wird nach $n+1$ verlegt.

Es gilt: $\leq$ trans. und reflexiv

Bew: $|A| \leq |B|$ mit $f: A \to B$ inj., $|B| \leq |C|$ mit g, dann
$|A| \leq |C|$ mit $g \circ f: A \to C$ inj.
$|A| \leq |A|$ mit Id.

Satz (Schröder Bernstein): $|A| \leq |B|$ & $|B| \leq |A| \to |A| = |B|$

Bew: Ü (Bem: Dazu braucht man kein AC)

Bem: Ähnliche Sätze gelten manchmal für zusätzliche Strukturen:
zB: wenn $f: A \to B$, $g: B \to A$ beide Borel, inj, dann $\exists$ gibt es Borelisom. $h: A \to B$

aber es gilt zB nicht: wenn $f: A \to B$ und $g: B \to A$ beide inj., stetig, dann A, B homöomorph

Beispiele

(·) $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$

Mit S.B.: $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}^2|$ durch $f: n \mapsto (n,0)$

$|\mathbb{N}^2| \leq |\mathbb{N}|$ durch $f: (n,m) \to 2^n \cdot 3^m$

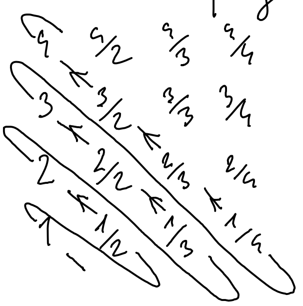
Ü: finde Bij. ohne S.B.

(·) $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$, zB mit $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $f(a) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } a = 0 \\ 2a, & \text{wenn } a > 0 \\ -2a-1 & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$

(·) $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$

Explizite Bijektion:

- sollte durch folgendes klar sein:



(Mehrfache Einträge, zB $1 = 2/2 = 3/3$ etc muß man für die Bijektion natürlich überspringen)

- Das ergibt also Aufzählung $(1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \dots)$
- Dafür explizite Formel anzugeben ist nicht sehr angenehm.
- Ausserdem muss man noch Bij $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ zu $\mathbb{Q}$ angeben.

Formaler Beweis also einfacher mit S.B.:

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, daher $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$ trivial,

$|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$ zB durch $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\frac{a}{b} \mapsto (a,b)$ inj

wissen schon: $\exists h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inj.

(·) A^B = {Mg der Fkt von B nach A}

Wir identifizieren oft 2 mit $\{0,1\}$, allg $n = \{0, \dots, n-1\}$

$2^{\mathbb{N}}$ bezeichnet dann $\{f: \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$

Das ist also nur eine andere Schreibweise für die Mg der 0-1 Folgen.

Genauso: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ ist Mg der Folgen natürlicher Zahlen.

(·) $|2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$ Mit S.B. $|2^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$ klar

Wissen schon: $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Dann gilt: $2^{\mathbb{N}} \cong 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} = (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, und

$|2^{\mathbb{N}}| \geq |\mathbb{N}|$, daher $|2^{\mathbb{N}}| = |(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}| \geq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$

In anderer Schreibweise: Sei $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bij.

Sei $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Def $f(a) \in 2^{\mathbb{N}}$ durch $f(a)(\varphi(n,m)) = 1$

gdw $a(n) = m$.

(·) $|2^{\mathbb{N}}| = |10^{\mathbb{N}}|$ (weil $|2^{\mathbb{N}}| \leq |10^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}|$)

(·) $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$ $\underline{\ddot{U}}$

(·) $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|$

(a) Def $f: 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ durch

$(a(0), a(1), a(2) \dots) \in 2^{\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(n)}{3^n}$

(warum nicht $1/2^n$?)

$\underline{\ddot{U}}$: f inj

(b) Def $g: (0,1) \to 10^{\mathbb{N}}$ inj. durch Dezimaldarst.

zB $r \mapsto 0{,}8735\dots$ (Dez Darst von $r \in (0,1)$, entspricht Folge mit Einträgen aus $0, \dots, 9$)

Bem Abgesehen von Kardinalität (d.h. Bijektionen) gibt es natürlich auch wichtige topolog. Äquivalenzen:

(·) $2^{\mathbb{N}}$ (mit der Produkttop.) ist homöomorph zur Cantormenge (die "kompakte 0-dimensionale Version" von $\mathbb{R}$)

(·) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (mit der Prod. top), auch Baire space genannt, ist homöomorph zu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, den irrationalen Zahlen. (Bew: Partialbruchzerlegung.)

($\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ist eine "sehr nicht-lokalkompakte 0-dim Version" von $\mathbb{R}$)

Weitere Bsp:

(·) $\mathbb{N}^{<\omega}$ = Mg der endl. Folgen natürlicher Zahlen

$|\mathbb{N}^{<\omega}| = |\mathbb{N}|$: $f: (a_0, a_1, \dots, a_n) \mapsto 2^{a_0+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n+1}$ inj.

(·) $\mathbb{Q}[X]$ .. Mg der rat. Polynome.

$|\mathbb{Q}[X]| = |\mathbb{N}|$ Ü

(·) Daraus folgt: Es gibt abzählbar viele algebraische Zahlen.

1.2 CANTORSCHE DIAGONALISIERUNG

Sind alle unendlichen Mg gleich groß?

Satz (Cantor): $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$

Wir schreiben $|A| < |B|$ für $(|A| \leq |B|$ und nicht $|B| \leq |A|)$

Es gilt also: $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

Bew: Sonst $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}|$, d.h. es gibt surjektive $f: \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$

$f(0): (0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$

$f(1): (1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$

$\vdots$

$f(n): (0, 1, 1, \dots, 1$

Def $g(m) := 1 - f(m)(m)$ $\quad g \in 2^{\mathbb{N}}$, d.h.

$g = f(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann $g(n) = 1 - f(n)(n)$ ↯

(Einfache Folgerung: Es gibt also nicht-algebraische reelle Zahlen)

Bem: Kontinuumshypothese (CH): Für jede unendl TM A von $\mathbb{R}$ gilt $|A| = |\mathbb{N}|$ oder $|A| = |\mathbb{R}|$

CH ist "unentscheidbar": Die üblichen Axiome der Mathematik (nämlich die ZFC Axiome) beweisen weder CH noch $\neg$CH. Das ist das "1. Hilbertsche Problem", gelöst von Gödel und Cohen.

2^A = Mg der Fkt $A \to \{0,1\}$
$\cong$ 0-1 Folgen indiziert mit A
$\cong$ Teilmengen von A ($\underset{-}{\tilde{U}}$: char. Fkt.)

$\mathcal{P}(A)$ ... Potenzmenge von A, d.h. Mg aller TM.
$\mathcal{P}(A) \cong 2^A$, insbes. $|\mathcal{P}(A)| = |2^A|$

<u>Satz</u> (Cantor) : $|2^A| = |\mathcal{P}(A)| > |A|$

Bew: Wie vorher für $A = \mathbb{N}$: Sonst
$f: A \to 2^A$ surj., $g(a) := 1 - f(a)(a)$ ↯

Die Potenzmenge ist also immer größer als die Menge selbst. Insbesondere gibt es keine Allmenge $V = \{x : x = x\}$. Etwas genauer: Man kann nicht davon ausgehen dass sowohl die Allmenge V existiert und dass zugleich jede Menge eine Potenzmenge hat. Da die Allmenge keine mathematische Bedeutung hat, die Potenzmenge aber schon, wird das Potenzmengenaxiom in die Axiomenliste ZFC aufgenommen, das Allmengenaxiom aber nicht (es kann in ZFC widerlegt werden). Genauer klären kann man diese Fragen erst im Kapitel "axiomatische Mengenlehre".

Ein weiteres Bsp das "naive" Anwendung des Mengenbilde-Operators $\{x : \varphi(x)\}$ zu Problemen führen kann: Russell Paradoxon $R = \{x : x \notin x\}$
Denn $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$, ↯

1.3. ORDNUNGEN, AUSWAHLAXIOM

Naheliegende Frage: Ist $|\cdot| \leq |\cdot|$ eine lineare Ordnung? D.h.: gilt für alle Mengen A, B: $|A| \leq |B|$ oder $|B| \leq |A|$?
Antwort: Ja, verwendet AC:

<u>Satz</u> Auswahlaxiom, AC: Sei $I \neq 0$ (Indexmenge) und $\forall i \in I$ X_i eine nichtleere Menge. Dann gibt es Fkt f mit $\mathrm{dom}(f) = I$ sd $f(i) \in X_i$ für alle $i \in I$

Äquivalent dazu (nur andere Formulierung):
Sei I, X_i wie oben. Dann $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$, d.h.: das kartesische Produkt nichtleerer Mg ist nichtleer.

"Bew": Wähle für jedes $i \in I$ ein $y_i \in X_i$, setze $f(i) := y_i$.

Das ist natürlich kein sehr überzeugender Bew. Wir werden sehen: In formaler Axiomatisierung der Mathematik ist AC ein Axiom, das nicht aus den anderen Axiomen folgt.
ZF bezeichnet das Axiomsystem der Mathematik ohne AC; ZFC ist ZF mit dem zusätzlichen Axiom AC. Es gilt also:
- Aus ZF kann man AC nicht ableiten
- Aus ZF kann man AC auch nicht widerlegen.

Folgerungen aus AC:

"Nützliches":

- Zornsches Lemma (siehe später)
- Jeder VR hat Basis
- Wohlordnungssatz (siehe später)
- Je zwei Kardinalzahlen sind vergleichbar

(Alle diese Sätze sind unter ZF äquivalent zu AC. Die folgenden Sätze sind schwächer:)

- Hahn-Banach
- Vereinigung abz. vieler abz. Mg ist abz.
- —"— endl. —"—

"Paradoxe" Folgerungen!

- Nicht meßbare Mengen:
  Das Leb-Maß läßt sich nicht translations-invariant auf ganz $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ fortsetzen.
- Im $\mathbb{R}^3$ sogar Banach-Tarski:
  Es gibt Partition von
  $B_1 = \{r \in \mathbb{R}^3 : |r| \le 1\}$ in $B_1 = A_0 \dot\cup A_1 \dot\cup \dots \dot\cup A_5$
  so, jedes der A_i einmal gedreht und verschoben wird, nenne Resultat A_i', und
  $A_1' \dot\cup \dots \dot\cup A_5' = B_2 = \{r \in \mathbb{R}^3 : |r| \le 2\}$
  Im $\mathbb{R}^3$ gibt es also nicht einmal endlich additive (transl. und rot. invariante) Maße auf ganz $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$!

Bem.: (·) Für endliches I "folgt" AC sehr wohl aus ZF (es gilt sogar ohne weitere Axiome, sondern ist Teil der Logik selbst).
(·) Dass alle X_i endlich sind nützt dagegen nichts: AC für endliche X_i (aber unendl. I) folgt nicht aus ZF.
(·) "countable choice", d.h. AC eingeschränkt auf den Fall dass I abzählb. ist, folgt auch nicht aus ZF. Es hat viele der "allernotwendigsten" Folgerungen von AC (darunter Folgerungen die die meisten Mathematiker gar nicht als Anwendung von AC erkennen, wie zB Königs-Lemma und "abz. Vereinig. von abz. Mg ist abz.); es hat aber keine der "allgemeinen" Folgerungen von AC und damit auch nicht die "pathologischen" Folgerungen von AC, wie: jeder VR hat Basis), nicht-meßbare Mg. etc.

(·) Solovay hat gezeigt dass AC für nicht-meßbare Mengen nötig ist: Aus ZF + countable choice folgt nicht daß es eine nicht-meßbare TM von $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{R}^3$ etc) gibt.
(Der Beweis setzt allerdings die Konsistenz einer großen Kardinalzahl voraus)

DAS ZORNSCHE LEMMA

<u>Def</u>: $(A, \leq)$ heißt <u>p.o.</u> (partielle Ordnung), wenn
trans: $a \leq b$ & $b \leq c \rightarrow a \leq c$
refl.: $a \leq a$
antisym: $a \leq b$ & $b \leq a \rightarrow a = b$

Bem: (·) A ist die "Grundmenge", $\leq$ die 2stellige Relation. Üblicherweise lassen wir $\leq$ in der Notation weg und sprechen nur von "der p.o. A"

(·) $a < b$ ist Abkürzung für: $a \leq b$ & $a \neq b$
Wenn umgekehrt die Ordnung $(A, <)$ gegeben ist wobei $<$ irreflexiv ist, definiert man mit $a \leq b :\Leftrightarrow a = b \vee a < b$

(·) Genauso def man $a > b :\Leftrightarrow b < a$ etc.

Es gilt: Wenn $B \subseteq A$, dann kann $\leq$ auf B eingeschränkt werden und ergibt wieder p.o. (einfache Ü)

<u>Def</u> (·) $(A, \leq)$ p.o. heißt <u>linear</u> (<u>l.o.</u>), wenn
$\forall a, b \in A \quad a \leq b \vee b \leq a$

(·) Sei A p.o. $B \subseteq A$ <u>Kette</u>, wenn B linear.
Äquiv: $\forall a, b \in B$: $a \leq b \vee b \leq a$

(·) $a \in A$ heißt <u>minimales Element (Minimum</u>, wenn es kein $b \in A$ gibt mit $b < a$.
Analog Maximum.

(·) $a \in A$ ist größtes Element, wenn $a \geq b$ für alle $b \in A$
Analog kleinstes Element.

(·) $a \in A$ ist obere Schranke für $B \subseteq A$, wenn $a \geq b$ für alle $b \in B$. Analog untere Schranke.

(·) $a \in A$ ist kleinste obere Schranke von $B \subseteq A$, wenn a kleinstes Element von $\{c : c \text{ o.S. von } B\}$

Ü (·) Jede endl. Kette hat kleinste obere und größte untere Schranke.

(·) $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ ist p.o., jede TM hat kleinste obere und größte untere Schranke

(·) Zeige: $(\mathbb{N}\setminus\{0\}, a \mid b)$ ← teilt ist p.o., jede endl. TM hat kl. obere und gr. untere Schranke, aber keine unendl TM hat obere Schranke.

<u>Satz</u> (Zornsches Lem) Wenn A p.o. und wenn jede Kette eine obere Schranke hat, dann hat A max. El.

<u>Anwendungen</u>:

(·) Jeder VR hat Basis
Bew: Basis ⟺ max l.u. Menge.
Sei A die Mg der l.u. TM von V, geordnet durch $\subseteq$ (Teilmengen bez.).
Wenn $B \subseteq A$ Kette, dann $\bigcup B$ l.u. und daher in A, d.h. obere Schranke.
($v_0, v_1 .., v_n \in \bigcup B \Rightarrow \exists a \in B$ sd $v_0 .. v_n \in a$
$\Rightarrow v_0 .. v_n$ l.u. Gilt nur weil B Kette!)
Z.L. $\Rightarrow$ es gibt max El. in A, d.h. Basis.

(·) Jeder Ring mit 1 hat max. Id. <u>Ü</u>

(·) Jeder Körper hat alg. Abschluss

(·) etc etc

"Beweis" vom Z.L. mit AC:

Für "ordentlichen" Beweis braucht man axiomatische Mengenlehre (ZFC), die Beweis"idee" ist naheliegend: Wähle als ersten Schritt die "einelementige Kette" $\{a_0\}$ ($a_0 \in A$ beliebig). Im Schritt α sei Kette B_α schon gegeben.

Fall 1: das größte El von B_α ist max. El in A. (dann sind wir fertig)

Fall 2: ansonsten wähle $a_\alpha \notin B_\alpha$ o.S. von B_α.

Behauptung: Irgendwann (genauer: vor $|P(A)|$ vielen Schritten) muss Konstruktion abbrechen, d.h. Fall 1 eintreten: Wir können kein beliebig langen Ketten in A konstruieren.

Def: $(A, \leq)$ ist Wohlordnung (w.o.), wenn A l.o. ist und jede nichtleere TM ein kleinstes Element hat.

Ü (AC): Sei A l.o. Dann A wo $\Leftrightarrow$ es gibt keine unendliche absteigende Folge in A.

Die wichtigste w.o. ist $(\mathbb{N}, \leq)$.

Die Bedeutung der w.o.: Erlaubt Induktion:

Induktion: Sei $(A, \leq)$ w.f. Ang. für alle $a \in A$ gelte:

$$[(\forall b < a)\ P(b)] \rightarrow P(a)$$

Dann gilt $P(a)$ für alle a

Bem: Bei $\mathbb{N}$ unterscheidet man üblicherweise Fälle $n = 0$ und $n = m+1$. Bei transfiniter Induktion braucht man auch Limes Fall.

Def: Sei A, B p.o. (1) $A \cong B$, oder: A und B sind isomorph, heißt: $\exists f: A \to B$ bij sd. $a \le a' \Leftrightarrow f(a) \le f(a')$

(·) A lässt sich in B einbetten, wenn $\exists f: A \to B$ inj sd $a \le a' \leftrightarrow f(a) \le f(a')$

(·) $A_a := \{b \in A : b < a\}$ „Anfangsabschnitt"

Lem (1) Keine w.o. ist zu Anfangsabschnitt isomorph. A w.o., $a \in A$, dann $A \not\cong A_a$

(2) Wenn A, B w.o. und isom., dann ist Isomorphie eindeutig: wenn f, g beide $A \to B$ bij. und ordn.erh., dann $f = g$

(3) Seien A, B w.o. Dann tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

(a) $A \cong B$ (insbes: $|A| = |B|$)

(·) $\exists a \in A$ $A_a \cong B$ (insbes: $|A| \le |B|$)

(·) $\exists b \in B$ $A \cong B_b$ (insbes: $|A| \ge |B|$)

Bem: Ü $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}_a$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Dasselbe gilt für $\mathbb{Q}$.

Bew (Details in Ü)

1. Ang $f: A \to A_a$ isom. Sei b min sd $f(b) \neq b$. Dann $f(b) > b$. Sei c sd $f(c) = b$. Dann $c > b$, aber $f(c) < f(b)$ ↯
2. Ang $f \neq g$ beide isom. Sei a min sd $f(a) \neq g(a)$. OBdA $f(a) > g(a)$. Sei b sd $f(b) = g(a)$. Dann $b > a$, $f(b) = g(a) < f(a)$ ↯
3. Setze $f(a) = b$ falls $A_a \cong B_b$. Zeige: f part. Fkt $A \to B$, inj, ord-erh.; und entw. $\mathrm{dom}(f) = A_a$, dann $f: A_a \cong B$, oder $\mathrm{dom}(f) = A$, dann $f: A \cong B_b$ oder $f: A \cong B$.

Der Wohlordnungssatz

Satz: Jede Menge A kann wohlgeordnet werden, d.h. es gibt Relation $\leq$ sd. $(A, \leq)$ w.o.

Bew: Mit Zorn: Sei X die Menge der $(B, \leq)$ sd

(·) $B \subseteq A$

(·) $\leq$ Relation auf B, $(B, \leq)$ w.o.

geordnet durch: $(B_2, \leq_2) \succeq (B_1, \leq_1)$ wenn (·) $B_2 \supseteq B_1$

(·) $\leq_1$ ist die durch $\leq_2$ induzierte Ordn. auf B_1 (d.h.: $b \leq_1 b' \Leftrightarrow b \leq_2 b'$ für alle $b, b' \in B_1$)

(·) $\forall b \in B_2 \setminus B_1$, $\forall b_1 \in B_1$: $b_1 \leq_2 b$ (d.h. B_2 ist "Endverlängerung" von B_1)

Jede Kette $Y \subseteq X$ hat o.S.:

$B_\infty := \bigcup \{B : \exists (B, \leq) \in Y\}$

$b_1 \leq_\infty b_2 :\Leftrightarrow \exists (B, \leq) \in Y : b_1, b_2 \in B,\ b_1 \leq b_2$

oder äquivalent

$\Leftrightarrow \forall (B, \leq) \in Y;\ b_1, b_2 \in B \to b_1 \leq b_2$

$(B_\infty, \leq_\infty)$ wieder w.o.: Wenn $C \subseteq B_\infty$ nichtleer, dann gibt es $(B, \leq) \in Y$ sd $C \cap B \neq 0$, d.h. $C \cap B$ hat min a. Das ist auch min von C.

Sei also $(B, \leq)$ <u>max</u> in X. Beh: $B = A$, d.h. A ist wohlordenbar.
Sonst wähle $a \in A \setminus B$, def $B_* := B \cup \{a\}$, und $b \leq_* b'$ durch: ($b, b' \in B$ und $b \leq b'$, oder $b' = a$).
Dann $(B_*, \leq_*)$ größer als $(B, \leq)$, ↯

Bem: AC, Z.L., Wohlordnungssatz sind alle äquivalent, d.h.: ZF beweist (AC $\Leftrightarrow$ Z.L.) etc

Zusammen mit Lemma ergibt sich also:

Folg: Je zwei Kardinalzahlen sind vergleichbar: $\forall A, B \quad |A| \leq |B| \vee |B| \leq |A|$

Kardinalzahlen ... Äquivalenzklassen von beliebigen Mengen (ohne vorgegebene Struktur) unter Rel "gleich groß"

$|A|$ .. Kardinalzahl von A

Notation: $|\mathbb{N}| =: \aleph_0$

$\aleph$ .. Aleph (erster Buchst. des Hebräischen Alphabets)

$\aleph_1$: nächstgrößere Kardinalzahl (so etwas existiert)

$2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$

CH: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ Cantor: $2^{\aleph_0} > \aleph_0$

Analog: Ordinalzahlen .. Äquivalenzkl. von Wohlordnungen unter "Isomorph".

Notation: $\omega :=$ Äquiv.klasse von $(\mathbb{N}, \leq)$

$\omega+1$: $\underbrace{\bullet \; \bullet \; \bullet \; \bullet \; \cdots}_{\omega} \; \bullet$

$\omega + 1 \neq \omega$, aber $|\omega+1| = |\omega| = \aleph_0$

Beides, Ord. und Kard.zahlen, sind Verallgemeinerungen des endl. Zählens: eins, zwei, ... vs erstes, zweites, ...