Beispiel-Prüfungsaufgaben zu Grundbegriffe der mathematischen Logik 2009SS

(1) Sei $\tau_0 = \{R\}$ (1stelliges Relationssymbol), Σ eine Satzmenge (oder ein Satz), der besagt daß das Universum 140 Elemente hat. Wieviele τ_0-Modelle (modulo Isomorphie) hat Σ? Sei $\tau_1 = \{R, S\}$ (beides (1stellige Relationssymbole). Wieviele τ_1-Modelle (modulo Isomorphie) hat Σ?

(2) Sei $\tau_0 = \{<\}$, $\tau_1 = \{<, f\}$, $\tau_2 = \{<, R\}$. ($<$ 2stelliges Relationssymbol, f 1stelliges Funktionssymbol, R 1stelliges Relationssymbol.) Sei Σ eine τ_0-Satzmenge (oder ein Satz), der besagt daß das Universum eine lineare Ordnung mit 140 Elementen ist. Wieviele τ_0-Modelle (modulo Isomorphie) hat Σ? Wieviele τ_1-Modelle? Wieviele τ_2-Modelle?

(3) Welche der folgenden Aussagen ist wahr (für eine τ-Struktur $\mathcal{M}$, eine konsistente τ-Satzmenge Σ und τ-Sätze φ und ψ):

- ☐ Wenn $\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$, dann $\mathcal{M} \models \varphi$ oder $\mathcal{M} \models \psi$.
- ☐ Wenn $\Sigma \models \varphi \vee \psi$, dann $\Sigma \models \varphi$ oder $\Sigma \models \psi$.
- ☐ Wenn ($\mathcal{M} \models \varphi$ oder $\mathcal{M} \models \psi$), dann $\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$.
- ☐ Wenn ($\Sigma \models \varphi$ oder $\Sigma \models \psi$), dann $\Sigma \models \varphi \vee \psi$.
- ☐ Wenn $\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$, dann $\mathcal{M} \models \varphi$ und $\mathcal{M} \models \psi$.
- ☐ Wenn $\Sigma \models \varphi \wedge \psi$, dann $\Sigma \models \varphi$ und $\Sigma \models \psi$.
- ☐ Wenn ($\mathcal{M} \models \varphi$ und $\mathcal{M} \models \psi$), dann $\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$.
- ☐ Wenn ($\Sigma \models \varphi$ und $\Sigma \models \psi$), dann $\Sigma \models \varphi \wedge \psi$.
- ☐ Wenn $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$, dann gilt: $\mathcal{M} \models \varphi$ impliziert $\mathcal{M} \models \psi$.
- ☐ Wenn $\Sigma \models \varphi \to \psi$, dann gilt: $\Sigma \models \varphi$ impliziert $\Sigma \models \psi$.
- ☐ Wenn gilt ($\mathcal{M} \models \varphi$ impliziert $\mathcal{M} \models \psi$), dann $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$.
- ☐ Wenn gilt ($\Sigma \models \varphi$ impliziert $\Sigma \models \psi$), dann $\Sigma \models \varphi \to \psi$.
- ☐ Wenn $\mathcal{M} \models \neg\varphi$, dann gilt $\mathcal{M} \models \varphi$ nicht.
- ☐ Wenn $\Sigma \models \neg\varphi$, dann gilt $\Sigma \models \varphi$ nicht.
- ☐ Wenn ($\mathcal{M} \models \varphi$) nicht gilt, dann $\mathcal{M} \models \neg\varphi$.
- ☐ Wenn ($\Sigma \models \varphi$) nicht gilt, dann $\Sigma \models \neg\varphi$.

(4) Eine τ-Satzmenge Σ heißt vollständig, wenn sie konsistent ist und für jeden τ-Satz φ gilt: $\Sigma \models \varphi$ oder $\Sigma \models \neg\varphi$. Eine τ-Erweiterung von Σ ist eine τ-Satzmenge Σ' so daß $\Sigma' \supseteq \Sigma$. Eine τ-Satzmenge Σ heißt maximal, wenn sie konsistent ist und echte τ-Erweiterung $\Sigma' \neq \Sigma$ von Σ konsistent ist. Welche der folgenden Sätze gilt allgemein:

- ☐ Jede vollständige Satzmenge ist maximal.
- ☐ Jede maximale Satzmenge ist vollständig.
- ☐ Jede Satzmenge hat eine maximale τ-Erweiterung.
- ☐ Jede Satzmenge hat eine vollständige τ-Erweiterung.
- ☐ Jede τ-Erweiterung einer inkonsistenten Satzmenge ist inkonsistent.
- ☐ Jede konsistente Satzmenge hat eine maximale τ-Erweiterung.
- ☐ Jede konsistente Satzmenge hat eine vollständige τ-Erweiterung.
- ☐ Jede konsistente Satzmenge hat genau eine maximale τ-Erweiterung.
- ☐ Eine Satzmenge ist konsistent genau dann wenn jede endliche Teilmenge konsistent ist.

(5) Welche der folgenden Sätze gilt allgemein:

- ☐ Wenn Σ ein Modell hat, dann auch ein unendliches.
- ☐ Wenn Σ beliebig grosse endliche Modelle hat, dann auch ein unendliches.
- ☐ Wenn Σ ein unendliches Modell hat, dann auch beliebig grosse endliche.
- ☐ Wenn Σ ein unendliches Modell hat, dann auch ein endliches.
- ☐ Wenn Σ ein unendliches Modell und ein endliches Modell hat, dann auch beliebig grosse endliche.
- ☐ Wenn Σ ein unendliches Modell hat, dann auch ein abzählbares.
- ☐ Wenn Σ ein unendliches Modell hat, dann auch ein überabzählbares.
- ☐ Wenn Σ ein abzählbares Modell hat, dann auch ein überabzählbares.

- ☐ Wenn Σ ein überabzählbares Modell hat, dann auch ein abzählbares.
- ☐ Wenn jede endliche Teilmenge von Σ ein Modell hat, dann auch Σ.
- ☐ Wenn jede endliche Teilmenge von Σ ein endliches Modell hat, dann auch Σ.
- ☐ Wenn jede endliche Teilmenge von Σ ein unendliches Modell hat, dann auch Σ.

(6) Sei τ_0 die Signatur $+, \cdot, <$ (mit den üblichen Stelligkeiten), und $\mathrm{Th}_0(\mathbb{N})$ ist dir Menge der τ_0-Sätze so daß $\mathbb{N} \models \varphi$ (für die kanonische Interpretation von $+, \cdot, <$ in $\mathbb{N}$); analog für $\mathrm{Th}_0(\mathbb{R})$. Sei Σ_1 der Satz der besagt daß das Universum 10 Elemente hat. Sei τ_2 die Signatur $e, \cdot$. Sei Σ_2 die Menge der τ_2-Sätze, die in *jeder* endlichen Gruppe gelten. Sei $\tilde{\Sigma}_2$ die Menge der τ_2-Sätze, die in *irgendeiner* endlichen Gruppe gelten.
Hat die Satzmenge Σ ein Modell der folgenden Größe?

Σ	endlich	abzählbar	überabzählbar
$\mathrm{Th}_0(\mathbb{N})$	☐	☐	☐
$\mathrm{Th}_0(\mathbb{R})$	☐	☐	☐
ZFC	☐	☐	☐
Σ_1	☐	☐	☐
Σ_2	☐	☐	☐
$\tilde{\Sigma}_2$	☐	☐	☐

(7) Das Spektrum $\mathrm{Sp}(\Sigma)$ von Σ sei die Menge (genauer: Klasse) von Kardinalitäten (endlich und unendlich) von Modellen von Σ. $\mathbb{N}$ sind die natürlichen Zahlen inklusive der 0. Welche der folgenden Aussagen gelten: Es gibt eine Satzmenge Σ, so daß

- ☐ $\mathrm{Sp}(\Sigma) = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$
- ☐ $\mathrm{Sp}(\Sigma) \cap \mathbb{N} = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$
- ☐ $\mathrm{Sp}(\Sigma) = \{2(n+1) : n \in \mathbb{N}\}$
- ☐ $\mathrm{Sp}(\Sigma) \cap \mathbb{N} = \{2(n+1) : n \in \mathbb{N}\}$
- ☐ $\mathrm{Sp}(\Sigma) = \{2(n+2) : n \in \mathbb{N}\}$
- ☐ $\mathrm{Sp}(\Sigma) \cap \mathbb{N} = \{2(n+2) : n \in \mathbb{N}\}$
- ☐ $\mathrm{Sp}(\Sigma)$ ist die Menge der Primzahlen
- ☐ $\mathrm{Sp}(\Sigma) \cap \mathbb{N}$ ist die Menge der Primzahlen
- ☐ $\mathrm{Sp}(\Sigma) = \{13, 57, 105\}$

(8) Welche der Folgenden Sätze $\varphi(x, y, p)$ ist als Definition für das geordnete Paar geeignet; d.h. aus ZFC folgt: $(\forall x, y = (\exists! p = \varphi(x, y, p)$ und $[\varphi(x, y, p) \wedge \varphi(x', y', p)] \rightarrow [x = x' \wedge y = y']$.

- ☐ $p = \{\{x\}, \{y\}\}$
- ☐ $p = \{x, \{x, y\}\}$
- ☐ $p = \{\{x\}, \{x, y\}\}$
- ☐ $p = \{\{\{x\}\}, \{x, y\}\}$
- ☐ $p = \{\{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$