Beispiel-Prüfungsaufgaben zu Grundbegriffe der mathematischen Logik 2009SS

Was ist die Größe der folgenden Mengen.
($\aleph_0$ ist die Größe von $\mathbb{N}$, $2^{\aleph_0}$ die Größe von $\mathbb{R}$. A^B ist die Menge aller Funktionen von B nach A. Ein rationales Polynom ist ein Element von $\mathbb{Q}[X]$, d.h. hat Koeffizienten in $\mathbb{Q}$. Eine reelle (oder komplexe) Zahl heißt algebraisch, wenn sie Nullstelle eines rationalen Polynoms ist.)
Der Stoff der mit (*) markieret Beispiele wurden in der Vorlesung noch nicht richtig behandelt.

	endlich	$\aleph_0$	$2^{\aleph_0}$	andere
$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$	☐	☐	☐	☐
Die Menge der Teilmengen von $\mathbb{N}$	☐	☐	☐	☐
Die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$	☐	☐	☐	☐
Die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$	☐	☐	☐	☐
Die Menge der rationalen Polynome	☐	☐	☐	☐
Die Menge der algebraischen reellen Zahlen	☐	☐	☐	☐
Die Menge der nichtalgebraischen reellen Zahlen	☐	☐	☐	☐
Die Menge der Teilmengen von $\mathbb{R}$	☐	☐	☐	☐
(*) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	☐	☐	☐	☐
(*) Die Menge der endlichen Folgen reeller Zahlen	☐	☐	☐	☐
(*) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (Hinweis: $(\kappa^\lambda)^\mu$ ist isomorph zu $\kappa^{\lambda\times\mu}$.)	☐	☐	☐	☐
(*) Die Menge der Folgen reeller Zahlen	☐	☐	☐	☐

Welche der folgenden Aussagen gilt (AC kann verwendet werden):
($|A|<|B|$ heißt: $|A| \leq |B|$ und nicht $|B| \leq |A|$.)

	wahr	falsch
Wenn es ein $f : A \to B$ injektiv und ein $g : B \to A$ injektiv gibt, dann auch ein $h : A \to B$ bijektiv.	☐	☐
Wenn es ein $f : A \to B$ surjektiv und ein $g : B \to A$ surjektiv gibt, dann auch ein $h : A \to B$ bijektiv.	☐	☐
Sei $A \neq \emptyset$. Dann $|A| < |B|$ gdw es ein surjektives $f : B \to A$ aber kein surjektives $f : A \to B$ gibt.	☐	☐
Sei $A \neq \emptyset$. Dann $|A| < |B|$ gdw $f : B \to A$ gibt das surjektives aber nicht injektives ist.	☐	☐
$|A| \leq |B|$ gdw es ein surjektives $f : B \to A$ gibt.	☐	☐
$|A| \leq |B|$ gdw es ein surjektives $f : B \to A$ gibt oder $A = \emptyset$.	☐	☐
$|A| \leq |B|$ gdw es ein injektives $f : A \to B$ gibt.	☐	☐

Welche der folgenden Aussagen gilt:
(Sei A eine partielle Ordnung. a ist maximal, wenn es kein $b \in A$ gibt mit $a < b$. a ist größtes Element, wenn $a \geq b$ für alle $b \in A$.)

	wahr	falsch
Wenn A eine Wohlordnung ist und $B \subseteq A$, dann hat B (als Teilordnung von A) genau ein kleinstes Element.	☐	☐
Wenn A eine Wohlordnung ist und $B \subseteq A$, dann hat B mindestens ein kleinstes Element.	☐	☐
Wenn A eine Wohlordnung ist und $B \subseteq A$, dann hat B eine obere Schranke.	☐	☐
Wenn A eine partielle Ordnung ist so daß jede Kette eine obere Schranke hat, dann hat A ein maximales Element.	☐	☐
Wenn A eine partielle Ordnung ist so daß jede Kette eine obere Schranke hat, dann hat A ein größtes Element.	☐	☐

Die folgende aussagenlogische Formel ist

	Tautologie	keine T. aber erfüllbar	unerfüllbar
$(A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg B)$	☐	☐	☐
$(A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B)$	☐	☐	☐
$A \to \neg A$	☐	☐	☐
$(A \to B) \to (\neg A \to \neg B)$	☐	☐	☐
$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	☐	☐	☐
$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$	☐	☐	☐
$(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \wedge B)$	☐	☐	☐

Sei $\mathcal{L} = \{<\}$ (2st Relationssymbol). Welche der folgenden Satzmengen besagt, daß $<$ das Universum linear ordnet:

☐ $[\forall x \forall y (x < y \vee y < x \vee x = y)] \wedge [\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z) \to x < z]$
☐ $\forall x \forall y \forall z \, [(x < y \vee y < x \vee x = y) \wedge ((x < y \wedge y < z) \to x < z) \wedge (\neg x < x)]$
☐ $[\forall x \forall y (x < y \vee y < x \vee x = y)] \wedge [\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z) \to x < z] \wedge [\forall x \neg x < x]$

Welche der folgenden Satzmengen besagt, daß das Universum genau 3 Elemente hat:

☐ $\exists x \exists y \exists z \forall t \, (t = x \vee t = y \vee t = z)$
☐ $\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$
☐ $[\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)] \wedge [\exists x \exists y \exists z \forall t \, (t = x \vee t = y \vee t = z)]$
☐ $\exists x \exists y \exists z \forall t \, [x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge (t = x \vee t = y \vee t = z)]$

Eine prädikatenlogische Formel φ heißt erfüllbar, wenn es eine Struktur $\mathcal{M}$ gibt mit $\mathcal{M} \models \varphi$, unerfüllbar sonst. φ heißt gültig, wenn $\models \varphi$, d.h. wenn für jede Struktur gilt $\mathcal{M} \models \varphi$.
Der folgende Satz ist

	gültig	nicht gültig, aber erfüllbar	unerfüllbar
$(\forall x \exists y \, f(x) > y) \to (\exists y \forall x \, f(x) > y)$	☐	☐	☐
$(\exists x \exists y \, f(x) > y) \to (\exists y \exists x \, f(x) > y)$	☐	☐	☐
$(\forall x \forall y \, f(x) > y) \to (\forall y \forall x \, f(x) > y)$	☐	☐	☐
$(\exists x \forall y \, f(x) > y) \to (\exists y \exists x \, f(x) > y)$	☐	☐	☐
$(\exists x \exists y \, f(x) > y) \to (\forall y \exists x \, f(x) > y)$	☐	☐	☐
$(\forall x \forall y \, f(x) > y) \to (\exists y \forall x \, f(x) > y)$	☐	☐	☐
$(\exists x \, f(x) > 0) \to (\exists x \forall x \, f(x) > 0)$	☐	☐	☐
$(\exists x \, f(x) > 0) \to (\forall x \exists y \, f(y) > 0)$	☐	☐	☐
$[\forall x (P(x) \to R(x))] \to [(\forall x P(x)) \to (\forall x R(x))]$	☐	☐	☐
$[\exists x (P(x) \to R(x))] \to [(\exists x P(x)) \to (\exists x R(x))]$	☐	☐	☐
$[\forall x (P(x) \wedge R(x))] \to [(\forall x P(x)) \wedge (\forall x R(x))]$	☐	☐	☐
$[\exists x (P(x) \wedge R(x))] \to [(\exists x P(x)) \wedge (\exists x R(x))]$	☐	☐	☐
$[\forall x (P(x) \vee R(x))] \to [(\forall x P(x)) \vee (\forall x R(x))]$	☐	☐	☐
$[\exists x (P(x) \vee R(x))] \to [(\exists x P(x)) \vee (\exists x R(x))]$	☐	☐	☐

Welche der folgenden Aussagen ist wahr (für eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$, eine $\mathcal{L}$-Satzmenge Σ und $\mathcal{L}$-Sätze φ und ψ):

	wahr	falsch
Wenn $\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$, dann $\mathcal{M} \models \varphi$ oder $\mathcal{M} \models \psi$.	☐	☐
Wenn $\Sigma \models \varphi \vee \psi$, dann $\Sigma \models \varphi$ oder $\Sigma \models \psi$.	☐	☐
Wenn $\Sigma \models \varphi \wedge \psi$, dann $\Sigma \models \varphi$ und $\Sigma \models \psi$.	☐	☐