Grundbegriffe der mathematischen Logik

Vorlesung WS 2005/2006

Jakob Kellner
http://www.logic.univie.ac.at/~kellner

Kurt Gödel Research Center for Mathematical Logic

11. Vorlesung, 2006-01-18

Wiederholung: Syntax und Semantik der Prädikatenlogik

- Definition: First order Sprache (zu Signatur $\mathcal{L}$): Formeln, freie Variable, Substitution, ...
  Bsp: $\mathcal{L} = \{<\}$ oder $\mathcal{L} = \{e, \cdot\}$.
- $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{M}$. Interpretation von variablenfreien $\mathcal{L}$-Termen als Elemente von $\mathcal{M}$. Definition der Gültigkeit von $\mathcal{L}$-Sätzen in $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \varphi$. (Definition verwendet die Signatur $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$.)
  Klar: $\mathcal{M} \models \varphi$ oder $\mathcal{M} \models \neg\varphi$.
- Sei Σ Satzmenge. $\mathcal{M}$ ist Σ-Modell oder $\mathcal{M} \models \Sigma$ heißt: $\mathcal{M} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Sigma$.
- Bsp: $\mathcal{M} = (M, <^M)$ ist lineare Ordnung gdw $\mathcal{M} \models$ LO. $\mathcal{M} = (M, e^M, \cdot^M)$ ist Gruppe gdw $\mathcal{M} \models$ GrAx.
- Semantische Folgerung: $\Sigma \models \varphi$ heißt: Jedes Σ-Modell erfüllt φ.
- Σ erfüllbar heißt: Σ hat Modell.
  Klar: Σ unerfüllbar gdw $\Sigma \models \forall x\, x \neq x$.

Wiederholung: Kalkül, Vollständigkeitssatz

- Hilbert-Kalkül:
  - r.e. Menge Logischer Axiome LogAx
  - beliebige Menge nichtlogischer Axiome Σ
  - die Regel Modus Ponens
- Ein Beweis von φ aus Σ ist Folge $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ so daß gilt: $\psi_n \equiv \varphi$, und für $i \leq n$ gilt:
  - $\psi_i \in \Sigma \cup$ LogAx, oder
  - es gibt $l, k < i$ s.d. $\psi_k \equiv \psi_l \to \psi_i$.
- $\Sigma \vdash \varphi$, φ ist syntaktisch ableitbar, heißt: es gibt so einen Beweis.
- Vollständigkeitssatz: $\Sigma \vdash \varphi$ gdw $\Sigma \models \varphi$.

Wichtige Folgerungen des Vollständigkeitssatzes:

- Berechenbarkeit / Komplexität:
  Wenn Σ r.e., dann auch die Folgerungen von Σ.
- Kompaktheit:
  Eine Satzmenge Σ ist erfüllbar wenn jede endliche Teilmenge erfüllbar ist.
- Skolem-Löwenheim:
  Wenn Σ ein unendliches Modell hat und $\mathcal{L}$ abzählbar ist, dann hat Σ Modelle in jeder unendliche Größe.

Definition:

- Sei $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{L}$-Modell.
  Theorie$(\mathcal{M}) = \{\varphi\ \mathcal{L}\text{-Satz} :\ \mathcal{M} \models \varphi\}$.
- Σ heißt vollständig, wenn $\Sigma \models \varphi$ oder $\Sigma \models \neg\varphi$ für alle $\mathcal{L}$-Sätze φ.

Berechenbarkeit / Komplexität

Wenn Σ r.e., dann auch die Folgerungen von Σ.

- Der schwierige und wichtige Begriff $\Sigma \models \varphi$ läßt sich (nach dem Vollständigkeitssatz) für first order Sätze auf $\Sigma \vdash \varphi$ reduzieren,
- Wenn Σ "relativ einfach", dann auch $\Sigma \vdash \varphi$.
- Aber: angenommen, $\mathcal{L}$ enthält 2st Präd.symb. Dann sind die Folgerungen von $\emptyset$ nicht rekursiv.
- Es gilt also im allgemeinen nicht:
  Wenn Σ rekursiv, dann sind die Folgerungen von Σ rekursiv.
- Es gilt aber klarerweise: Wenn Σ r.e. und vollständig, dann sind die Folgerungen von Σ sehr wohl rekursiv.
- Insbesondere: Wenn Theorie$(\mathcal{M})$ eine r.e. Axiomatisierung hat, dann ist Theorie$(\mathcal{M})$ rekursiv.

Ein Beispiel für eine vollständig r.e. Theorie werden wir heute kennenlernen (DLO).

Der 1. Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Wir haben (ohne Beweis) behauptet:
Das 10. Hilbertsche Problem ist unentscheidbar.
Es gibt kein Computerprogramm, das entscheidet, ob $f(X_1, \dots, X_n)$ eine ganzzahlige Nullstelle hat.

Sätze der Form "$f(X_1, \dots, X_n)$ hat ganzzahlige Nullstelle" lassen sich effektiv in first order Sätze übersetzen ($\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot\}$).
Z.B. enspricht $X_1^2 + 3 \cdot X_1 \cdot X_2$ hat ganzzahlige Nullstelle dem Satz $\exists X_1 \exists X_2\ X_1 \cdot X_1 + (1 + (1 + 1)) \cdot (X_1 \cdot X_2) = 0$.

Daher hat Theorie$(\mathbb{N})$ mit $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot\}$ keine r.e. Axiomatisierung (1. Gödelsche Unvollständigkeitssatz).

(Bem.: das kann man natürlich viel einfacher zeigen, ohne 10. Hilbert)

Kompaktheit

Kompaktheit: Jede endlich erfüllbare Satzmenge ist erfüllbar.

- Folgerung: Nonstandard Modelle: Theorie$(\mathbb{N})$ hat nonstandard Modell, d.h. Modell mit c s.d. $c > 1$, $c > 1 + 1$, ...
- Analog: Angenommen $\mathcal{L}$ enthält $<$, und Σ ist konsistente Satzmenge, die in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ gilt. Dann gibt es ein nonstandard-Modell von Σ.
- $\mathbb{N}$ erfüllt das (second order) Induktionsprinzip:
  Sei A beliebige Teilklasse des Universums. Angenommen es gilt $0 \in A$, und $n \in A$ impliziert $n + 1 \in A$. Dann ist A das ganze Universum.
- Das Induktionsprinzip läßt sich in first order Sprache nicht formulieren: Das nonstandard Modell erfüllt ja alle first order Sätze Theorie$(\mathbb{N})$, aber nicht das Induktionsprinzip.
  (Setzte $A = \{0, 1, 1 + 1, \dots\}$.)
- Sehr formulierbar (φ fixe f.o. Formel):
  $[\varphi(0) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(x + 1))] \ \to\ \forall x\, \varphi(x)$

Skolem-Löwenheim

Wenn Σ ein unendliches Modell hat und $\mathcal{L}$ abzählbar ist, dann hat Σ Modelle in jeder unendlichen Größe.

Beispiel:

- Theorie$(\mathbb{R})$ in $\mathcal{L} = 0, 1, +, \cdot, <$ hat also abzählbares Modell (z.B.: algebraischen Zahlen).
- Theorie$(\mathbb{N})$ hat überabzählbares Modell.
- ZFC, die Standard-Axiomatisierung der Mengenlehre ($\mathcal{L} = \{\in\}$), hat ein abzählbares Modell. ("Skolem-Paradoxon".)

Rekursiv axiomatisierbare first order Theorien

Wir haben gesehen: Theorie($\mathbb{N}$) (mit $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot\}$) läßt sich nicht r.e. axiomatisieren.

Insbesondere läßt sich die "gesamte Mathematik" nicht vollständig r.e. axiomatisieren (vgl. Hilbert Programm).

Es gibt aber:

- Die "momentan soziologisch vollständige" first order Axiomatisierung ZFC: Jeder allgemein akzeptierte mathematische Beweis läßt sich in einen (first order) ZFC Beweis übersetzen.
- Teilgebiete der Mathematik bzw. bestimmte Strukturen können sehr wohl eine "formal vollständige" rekursive Axiomatisierung haben. (D.h. Formelmenge Σ s.d. $\Sigma \models \varphi$ oder $\Sigma \models \neg\varphi$.)

Rekursiv axiomatisierbare first order Theorien

Rekursiv axiomatisierbare vollständige Theorien/Strukturen

- Theorie($\mathbb{N}$) in $\mathcal{L} = \{0, 1, +\}$: Presburger Arithmetik.
- Theorie($\mathbb{Q}$) in $\mathcal{L} = \{<\}$: dichte lineare Ordnungen.
- Theorie($\mathbb{Z}$) in $\mathcal{L} = \{<\}$: diskrete lineare Ordnungen.
- Euklidische Geometrie.
- Theorie($\mathbb{R}$) in $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, <\}$: reell abg. Körper (nicht aber z.B. in $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, \sin, <\}$).
- Theorie($\mathbb{C}$) in $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot\}$: alg. abg. Körper.
- Der random graph (in $\mathcal{L} = \{E\}$).

Rekursive unvollständige Axiomatisierungen

- Peano Arithmetik, PA $\subseteq$ Theorie($\mathbb{N}$) in $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, <\}$.
- ZFC (Mengenlehre) in $\mathcal{L} = \{\in\}$.

DLO

Sei $\mathcal{L} = \{<\}$ (zweistelliges Relationssymbol).

DLO, die Theorie der dichten Linearen Ordnungen

$$\begin{array}{lcr}
\text{Tr} & \equiv & \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z \\
\text{Tot} & \equiv & \forall x \forall y (x < y \vee y < x \vee x = y) \\
\text{AS} & \equiv & \forall x (\neg x < x) \\
\text{Dense} & \equiv & \forall x \forall y \exists z [x < y \rightarrow (x < z \wedge z < y)] \\
\text{EP} & \equiv & \forall x \exists y \exists z (x < y \wedge z < x)
\end{array}$$

DLO = {Tr, Tot, AS, Dense, EP}.

Es gilt:

- DLO hat keine endlichen Modelle (wegen des Axioms Dense),
- $(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}}) \models$ DLO, d.h. $\mathbb{Q}$ ist eine dichte lineare Ordnung.
- Insbesondere ist DLO konsistent.

Wir werden sehen:

Satz

Je zwei abzählbare Modelle von DLO sind isomorph.

Daraus folgt:

- DLO ist vollständig.
- DLO ist eine (endliche) Axiomatisierung für Theorie($\mathbb{Q}$) (in der Signatur $\mathcal{L} = \{<\}$).
- Theorie($\mathbb{Q}$) ist rekursiv.

Beweis: Angenommen DLO $\not\models \varphi$, DLO $\not\models \neg\varphi$. Dann sind DLO $\cup \{\varphi\}$ und DLO $\cup \{\neg\varphi\}$ konsistent, und es gibt entsprechende abzählbare Modelle, die aber Isomorph sein mussen, ein Widerspruch.

$\aleph_0$-kategorisch versus vollständig

Es gilt also: Wenn es ein abzählbares Σ-Modell gibt, und je zwei dieser Modelle isomorph sind, dann ist Σ vollständig.

Die Umkehrung gilt i.A. nicht. Zum Beispiel: Theorie($\mathbb{N}$) ist natürlich vollständig, aber ein nonstandard-Modell kann nicht isomorph zu $\mathbb{N}$ sein.

Peano Arithmetik

PA

$$\begin{array}{ll}
\forall x\, x + 1 \neq 0 & \forall x \forall y (x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y) \\
\forall x\, x + 0 = x & \forall x \forall y\, x + (y + 1) = (x + y) + 1 \\
\forall x\, x \cdot 0 = 0 & \forall x \forall y\, x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x
\end{array}$$

$\forall y_1 \dots \forall y_n [\varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x, y_1, \dots, y_n) \rightarrow \varphi(x + 1, y_1, \dots, y_n)) \rightarrow \forall x \varphi(x, y_1, \dots, y_n)]$, wenn nur $x, y_1, \dots, y_n$ frei in $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$.

Es stellt sich heraus:

- Fast alle (elementar) zahlentheoretischen Sätze, die (im soziologischen Sinn) heutzutage beweisbar sind, sind schon in PA beweisbar.
- Ein Großteil der "Alltags-Mathematik", insbesondere fast alle naturwissenschaftlich relevante Mathematik, läßt sich in einem System betreiben, daß "gleich stark" wie PA ist.
- Für einige Resultate, vor allem aber für natürlichere und effizientere Beweise benötigt man ZFC.