Grundbegriffe der mathematischen Logik

Vorlesung WS 2005/2006

Jakob Kellner
http://www.logic.univie.ac.at/~kellner

Kurt Gödel Research Center for Mathematical Logic

5. Vorlesung, 2005-11-16

Wiederholung: Aussagenlogik

- Richard Paradoxon: Sei n die kleinste natürliche Zahl, die nicht mit einem Satz mit weniger als 100 Zeichen definiert werden kann.
- Das deutet an: Es kann keine universelle mathematische (und zugleich metamathematische) Sprache geben.
- Daher notwendige Trennung in Objektsprache und Metasprache.
- Einfachstes Beispiel für Objektsprache: Aussagenlogik.

Syntax der Aussagenlogik

Wir definieren nun die Menge der Sätze der Aussagenlogik.
Ein Satz ist eine Zeichenkette (rein syntaktisch) mit den Zeichen

$$(,\ ),\ \neg,\ \rightarrow,\ \wedge,\ \vee,\ A_1,\ A_2,\ \dots$$

Induktive Definition der aussagenlogischen Sätze

- A_i ist ein Satz (Atomsatz) für jedes $i \in \mathbb{N}$
- Wenn φ und ψ Sätze sind, dann auch $\neg\varphi$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$ und $(\varphi \vee \psi)$.

(Man kann für beliebige Indexmengen I die Atomsätze A_i ($i \in I$) verwenden.)

Beispiele für Sätze der Aussagenlogik

- A_1
- $(\neg A_1 \wedge A_2)$
- $((\neg A_1 \rightarrow \neg A_2) \rightarrow (A_1 \rightarrow A_2))$
- $((A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow (\neg A_2 \rightarrow \neg A_1))$

Semantik der Aussagenlogik

Jetzt definieren wir die "Bedeutung" (Semantik) von Sätzen:

Belegungen

- Eine Belegung b ist eine Abbildung $\{A_i :\ i \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{w, f\}$.
- Jede Belegung b kann kanonisch auf Funktion von den Sätzen nach $\{w, f\}$ fortgesetzt werden:
  - $b(\neg\varphi) = w$ gdw $b(\varphi) = f$,
  - $b(\varphi \vee \psi) = w$ gdw $b(\varphi) = w$ oder $b(\psi) = w$,
  - $b(\varphi \wedge \psi) = w$ gdw $b(\varphi) = w$ und $b(\psi) = w$,
  - $b(\varphi \rightarrow \psi) = f$ gdw $b(\varphi) = w$ und $b(\psi) = f$.
- Ein Satz φ ist erfüllbar, wenn $b(\varphi) = w$ für eine Belegung.
- Ein Satz φ ist gültig (Tautologie), wenn $b(\varphi) = w$ für alle Belegungen.
- Ein Satz φ ist unerfüllbar (Kontradiktion), wenn $b(\varphi) = w$ für keine Belegung.
- Eine Menge Σ von Sätzen ist erfüllbar, wenn es eine Belegung b gibt so daß $b(\varphi) = w$ für alle $\varphi \in \Sigma$.

Satz

Wenn b, b' Belegungen und $b(A_i) = b'(A_i)$ für jedes in φ vorkommende A_i, dann ist $b(\varphi) = b'(\varphi)$.

Wahrheitstabelle: $b(\varphi)$ in Abhängigkeit von $b(A_i)$:
Beispiel: $\varphi = ((A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow A_3) \rightarrow (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_3))$:
Setze $\psi_1 = (A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow A_3$ und $\psi_2 = A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_3)$.

A_1	A_2	A_3	$A_1 \rightarrow A_2$	ψ_1	$A_2 \rightarrow A_3$	ψ_2	φ
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	f	f	w
w	f	w	f	f	w	w	w
w	f	f	f	f	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Daher: φ ist Tautologie (insbes. erfüllbar, keine Kontradiktion).

Berechenbarkeit

Satz

Es ist effektiv entscheidbar ob φ eine Tautologie ist (bzw. eine Kontradiktion bzw. erfüllbar).

Klar: Wahrheitstabelle.
(Damit definiert: Formeln vorher als Zahl kodieren!)

Wahrheitstabelle für Formeln mit n Zeichen hat i.A. Größe ca. 2^n.
Das triviale Computerprogramm, das Erfüllbarkeit entscheidet hat also exponentielle Laufzeit.

Frage: Gibt es auch ein Programm mit polynomieller Laufzeit?

Das ist das P/NP Problem (bzw. eine der vielen äquivalenten Formen), das wichtigste offene Problem der theoretischen Informatik.

Der Kompaktheitssatz

Zur Erinnerung: Σ ist erfüllbar wenn es eine Belegung b gibt so daß $b(\varphi) = w$ für alle $\varphi \in \Sigma$.

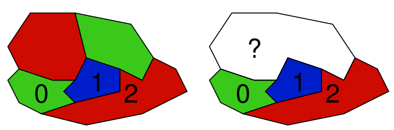
Satz

Σ ist erfüllbar gdw jede endliche Teilmenge von Σ erfüllbar ist.

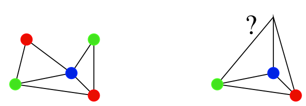
(Ohne Beweis.)

Einfache Folgerung von Kompaktheit: Färbungen

Frage: Läßt sich jedes Land in Landkarte mit 3 Farben färben s.d. benachbarte Länder verschiedene Farben haben?



Allgemeiner: Für welche ungerichteten Graphen G kann man Knoten mit 3 Farben färben s.d. verbundene Knoten verschiedene Farben haben?



Landkarten (=planare Graphen) können unendlich sein.

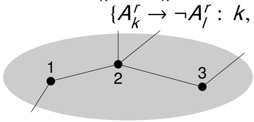
Einfache Folgerung des Kompaktheitssatzes

Färbbarkeit ist lokal

Man kann einen Graph mit 3 Farben färben genau dann wenn man jeden endlichen Teilgraph mit 3 Farben färben kann.

(Ein analoger Satz gilt für 4 Farben etc.)
Beweis: Sei G die Menge der Knoten. Die Farben seien r, g, b. Für jeden Knoten k und Farbe c sei A_k^c die Aussage "k hat Farbe c".

$$\Sigma = \{A_k^r \vee A_k^g \vee A_k^b : k \in G\} \cup \{\neg A_k^r \vee \neg A_k^g : k \in G\} \cup \cdots \cup \{A_k^r \to \neg A_l^r : k, l \in G \text{ verbunden}\} \cup \ldots.$$



$0 \in G$. $1 \in G$ verbunden mit 0.
$\{A_0^r \vee A_0^g \vee A_0^b,\ \neg A_0^r \vee \neg A_0^g,\ \neg A_0^r \vee \neg A_0^b,\ \neg A_0^g \vee \neg A_0^b\} \subset \Sigma$,
$\{A_0^r \to \neg A_1^r,\ A_0^g \to \neg A_1^g,\ A_0^b \to \neg A_1^b\} \subset \Sigma$.

Einfache Folgerung des Kompaktheitssatzes (Forts.)

- Eine Belegung b, die Σ erfüllt, entspricht einer Färbung: Farbe für $k \in G$ ist das eindeutige $c \in \{r, g, b\}$ s.d. $b(A_k^c) = w$.
- Daher: Σ ist erfüllbar gdw es eine Färbung gibt.
- Kompaktheitssatz: Wenn jedes endliche $S \subset \Sigma$ erfüllbar, dann Σ.
- In jeder endlichen Teilmenge T von Σ kommen nur endlich viele Atomformeln vor. Diese sind endlich vielen Knoten zugeordnet.
- Wenn der endliche Teilgraph aus diesen Konoten färbbar ist, dann ist T erfüllbar.
- Insgesamt also: Wenn jede endliche Teilgraph färbbar, dann auch G.

Das funktioniert natürlich genauso mit 4 Farben etc.

Da der 4-Farbensatz für endliche Karten gilt, gilt er somit auch für unendliche Karten.