

# Grundbegriffe der mathematischen Logik

Vorlesung WS 2005/2006

Jakob Kellner

<http://www.logic.univie.ac.at/~kellner>

Kurt Gödel Research Center for Mathematical Logic

5. Vorlesung, 2005-11-16

# Wiederholung: Aussagenlogik

- Richard Paradoxon: Sei  $n$  die kleinste natürliche Zahl, die nicht mit einem Satz mit weniger als 100 Zeichen definiert werden kann.
- Das deutet an: Es kann keine universelle mathematische (und zugleich metamathematische) Sprache geben.
- Daher notwendige Trennung in Objektsprache und Metasprache.
- Einfachstes Beispiel für Objektsprache: Aussagenlogik.

# Syntax der Aussagenlogik

Wir definieren nun die Menge der Sätze der Aussagenlogik.

Ein Satz ist eine **Zeichenkette** (rein syntaktisch) mit den Zeichen

$$(, ), \neg, \rightarrow, \wedge, \vee, A_1, A_2, \dots$$

## Induktive Definition der aussagenlogischen Sätze

- $A_i$  ist ein Satz (Atomsatz) für jedes  $i \in \mathbb{N}$
- Wenn  $\varphi$  und  $\psi$  Sätze sind, dann auch  $\neg\varphi$ ,  $(\varphi \rightarrow \psi)$ ,  $(\varphi \wedge \psi)$  und  $(\varphi \vee \psi)$ .

(Man kann für beliebige Indexmengen  $I$  die Atomsätze  $A_i$  ( $i \in I$ ) verwenden.)

## Beispiele für Sätze der Aussagenlogik

- $A_1$
- $(\neg A_1 \wedge A_2)$
- $((\neg A_1 \rightarrow \neg A_2) \rightarrow (A_1 \rightarrow A_2))$
- $((A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow (\neg A_2 \rightarrow \neg A_1))$

# Semantik der Aussagenlogik

Jetzt definieren wir die “Bedeutung” (Semantik) von Sätzen:

## Belegungen

- Eine Belegung  $b$  ist eine Abbildung  $\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{w, f\}$ .
- Jede Belegung  $b$  kann kanonisch auf Funktion von den Sätzen nach  $\{w, f\}$  fortgesetzt werden:
  - ▶  $b(\neg\varphi) = w$  gdw  $b(\varphi) = f$ ,
  - ▶  $b(\varphi \vee \psi) = w$  gdw  $b(\varphi) = w$  oder  $b(\psi) = w$ ,
  - ▶  $b(\varphi \wedge \psi) = w$  gdw  $b(\varphi) = w$  und  $b(\psi) = w$ ,
  - ▶  $b(\varphi \rightarrow \psi) = f$  gdw  $b(\varphi) = w$  und  $b(\psi) = f$ .
- Ein Satz  $\varphi$  ist erfüllbar, wenn  $b(\varphi) = w$  für eine Belegung.
- Ein Satz  $\varphi$  ist gültig (Tautologie), wenn  $b(\varphi) = w$  für alle Belegungen.
- Ein Satz  $\varphi$  ist unerfüllbar (Kontradiktion), wenn  $b(\varphi) = w$  für keine Belegung.
- Eine Menge  $\Sigma$  von Sätzen ist erfüllbar, wenn es eine Belegung  $b$  gibt so daß  $b(\varphi) = w$  für alle  $\varphi \in \Sigma$ .

## Satz

Wenn  $b, b'$  Belegungen und  $b(A_i) = b'(A_i)$  für jedes in  $\varphi$  vorkommende  $A_i$ , dann ist  $b(\varphi) = b'(\varphi)$ .

Wahrheitstabelle:  $b(\varphi)$  in Abhängigkeit von  $b(A_i)$ :

Beispiel:  $\varphi = ((A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow A_3) \rightarrow (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_3))$ :

Setze  $\psi_1 = (A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow A_3$  und  $\psi_2 = A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_3)$ .

$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_1 \rightarrow A_2$	$\psi_1$	$A_2 \rightarrow A_3$	$\psi_2$	$\varphi$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	f	f	w
w	f	w	f	f	w	w	w
w	f	f	f	f	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Daher:  $\varphi$  ist Tautologie (insbes. erfüllbar, keine Kontradiktion).

## Satz

Es ist effektiv entscheidbar ob  $\varphi$  eine Tautologie ist (bzw. eine Kontradiktion bzw. erfüllbar).

Klar: Wahrheitstabelle.

(Damit definiert: Formeln vorher als Zahl kodieren!)

Wahrheitstabelle für Formeln mit  $n$  Zeichen hat i.A. Größe ca.  $2^n$ .

Das triviale Computerprogramm, das Erfüllbarkeit entscheidet hat also exponentielle Laufzeit.

**Frage: Gibt es auch ein Programm mit polynomieller Laufzeit?**

Das ist das P/NP Problem (bzw. eine der vielen äquivalenten Formen), das wichtigste offene Problem der theoretischen Informatik.

# Der Kompaktheitssatz

Zur Erinnerung:  $\Sigma$  ist erfüllbar wenn es eine Belegung  $b$  gibt so daß  $b(\varphi) = w$  für alle  $\varphi \in \Sigma$ .

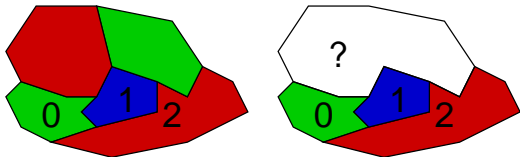
## Satz

$\Sigma$  ist erfüllbar gdw jede endliche Teilmenge von  $\Sigma$  erfüllbar ist.

(Ohne Beweis.)

# Einfache Folgerung von Kompaktheit: Färbungen

Frage: Läßt sich jedes Land in Landkarte mit 3 Farben färben s.d. benachbarte Länder verschiedene Farben haben?



Allgemeiner: Für welche ungerichteten Graphen  $G$  kann man Knoten mit 3 Farben färben s.d. verbundene Knoten verschiedene Farben haben?



Landkarten (=planare Graphen) können unendlich sein.



# Einfache Folgerung des Kompaktheitssatzes

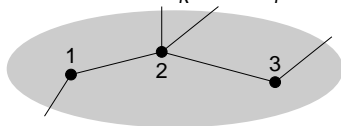
## Färbbarkeit ist lokal

Man kann einen Graph mit 3 Farben färben genau dann wenn man jeden endlichen Teilgraph mit 3 Farben färben kann.

(Ein analoger Satz gilt für 4 Farben etc.)

Beweis: Sei  $G$  die Menge der Knoten. Die Farben seien  $r, g, b$ . Für jeden Knoten  $k$  und Farbe  $c$  sei  $A_k^c$  die Aussage "k hat Farbe c".

$$\Sigma = \{A_k^r \vee A_k^g \vee A_k^b : k \in G\} \cup \{\neg A_k^r \vee \neg A_k^g : k \in G\} \cup \dots \cup \\ \{A_k^r \rightarrow \neg A_l^r : k, l \in G \text{ verbunden}\} \cup \dots$$



$0 \in G$ .  $1 \in G$  verbunden mit  $0$ .

$$\{A_0^r \vee A_0^g \vee A_0^b, \neg A_0^r \vee \neg A_0^g, \neg A_0^r \vee \neg A_0^b, \neg A_0^g \vee \neg A_0^b\} \subset \Sigma, \\ \{A_0^r \rightarrow \neg A_1^r, A_0^g \rightarrow \neg A_1^g, A_0^b \rightarrow \neg A_1^b\} \subset \Sigma.$$

## Einfache Folgerung des Kompaktheitssatzes (Forts.)

- Eine Belegung  $b$ , die  $\Sigma$  erfüllt, entspricht einer Färbung: Farbe für  $k \in G$  ist das eindeutige  $c \in \{r, g, b\}$  s.d.  $b(A_k^c) = w$ .
- Daher:  $\Sigma$  ist erfüllbar gdw es eine Färbung gibt.
- Kompaktheitssatz: Wenn jedes endliche  $S \subset \Sigma$  erfüllbar, dann  $\Sigma$ .
- In jeder endlichen Teilmenge  $T$  von  $\Sigma$  kommen nur endlich viele Atomformeln vor. Diese sind endlich vielen Knoten zugeordnet.
- Wenn der endliche Teilgraph aus diesen Knoten färbbar ist, dann ist  $T$  erfüllbar.
- Insgesamt also: Wenn jede endliche Teilgraph färbbar, dann auch  $G$ .

Das funktioniert natürlich genauso mit 4 Farben etc.

Da der 4-Farbensatz für endliche Karten gilt, gilt er somit auch für unendliche Karten.