Axiomatische Mengenlehre I, WS 2005/2006
9. Übung, 2005-12-15

Legende:

(+)	Die Aufgabe ist nicht trivial.
(++)	Eine etwas schwierigere Aufgabe.
(+++)	Benötigt Theorie die in der Vorlesung noch nicht besprochen wurde.

Definition: Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

$a_0, \dots a_n$ sind linear unabhängig, wenn für alle $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ aus K mit $\alpha_i \neq 0$ für zumindest ein $i \leq n$ gilt: $0 \neq \alpha_0 \cdot a_0 + \cdots + \alpha_n \cdot a_n$

$A \subseteq V$ ist linear unabhängig, wenn (für alle $n \in \mathbb{N}$) alle $a_0, \dots a_n \in A$ linear unabhängig sind.

Eine Basis ist eine maximale linear unabhängige Menge.

Beispiel 1: (+) Zeige (mit Zornschem Lemma): Jeder Vektorraum hat eine Basis.

Definition: Eine Menge $A \subseteq [0,1]$ ist abgeschlossen nirgends dicht, wenn A abgeschlossen ist und leeres Inneres hat (d.h. $A^\circ = \emptyset$, in diesem Fall äquivalent zu: A enthält kein Intervall.)

$A \subseteq [0,1]$ ist mager, wenn $B \subseteq \bigcap_{i\in\omega} A_i$, für A_i abgeschlossen nirgends dicht.

Beispiel 2: Zeige: Die Menge der mageren Mengen ist ein σ-Ideal.

Definition: Eine Menge $A \subseteq [0,1]$ ist Lebesgue-Null ($A \in \mathrm{LN}$), wenn es für jedes $\epsilon > 0$ eine Folge $(O_n)_{n\in\omega}$ rationaler Intervalle gibt s.d. $A \subseteq \bigcup_{n\in\omega} O_n$ und $\sum_{n\in\omega} \mathrm{length} O_n < \epsilon$. Dabei bezeichnet $\mathrm{length} O_n$ die Länge des Intervalls.

Wir wissen schon: LN ist σ-Ideal.

Beispiel 3: (++) Zeige: Es gibt eine abgeschlossen nirgends dichte Menge, die keine Lebesgue Nullmenge ist.

Hinweis: Die selbe Konstruktion wie Cantor-Nullmenge, nur wird in Schritt n nicht das innere Drittel, sondern ein inneres ϵ_n-tel entfernt. Der Schnitt ist (wie bei Cantormenge) abgeschlossen und hat leeres Inneres. Im Unterschied zu Cantormenge haben wir aber positives Maß. Benutze: Wenn A_i absteigende Folge von Teilmengen von $[0,1]$, dann ist das Maß von $\bigcup A_i$ gleich dem Limes der Maße der A_i.

Beispiel 4: (++: Benötigt Satz von Baire) Zeige: Es gibt eine Lebesgue Nullmenge, die nicht mager ist.

Hinweis: Benütze Satz von Baire: Der Schnitt von offenen, dichten Mengen ist nicht mager. Finde offene Überdeckungen von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ mit Maß $1/n$, schneide alle diese Überdeckungen. Das ergibt eine Nullmenge, die laut Satz von Baire nicht mager ist.

Weiter auf der nächsten Seite:

Definition: Sei $a, b \in [0,1[$. $a +^* b = a + b \mod 1$.

$a \cong b$ heißt: Es gibt ein $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$ so daß $b = a +^* q$.

Sei $A \subseteq [0,1[$. $A + q := \{a +^* q : a \in A\} \subseteq [0,1[$.

Ein "translationsinvariantes Maß auf ganz $[0,1[$" ist ein Abbildung μ von der Potenzmenge von $[0,1[$ nach $[0,1[$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\mu([0,1[) > 0$
- Wenn B abzählbare disjunkte Vereinigung von A_i, dann ist $\mu(B) = \sum \mu(A_i)$.
- $\mu(A + q) = \mu(A)$ für $q \in \mathbb{Q}$.

Beispiel 5: (++) Zeige: Es gibt keine translationsinvariantes Maß auf ganz $[0,1[$.

Hinweis: $\cong$ ist Äquivalenzrelation, es partitioniert also $[0,1[$. Mit Auswahlaxiom wähle ein $A \subseteq [0,1[$ das genau ein Element aus jeder Äquivalenzklasse enthält. Dann gibt es für jedes $x \in [0,1[$ genau ein $a \in A$ und $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$ so daß $x = a +^* q$. Dann ist $[0,1[$ die disjunkte Vereinigung von $A + q$ für $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$. Warum ist das ein Widerspruch?