Axiomatische Mengenlehre I, WS 2005/2006
8. Übung, 2005-12-01

Legende:

(+)	Die Aufgabe ist nicht trivial.
(++)	Eine etwas schwierigere Aufgabe.
(+++)	Benötigt Theorie die in der Vorlesung noch nicht besprochen wurde.

Definition: $\mathrm{cf}(\delta)$ bezeichnet die Konfinalität von δ.
$\mathcal{P}(X)$ bezeichne die Potenzmenge von X.
$\mathcal{P}(X)$ bezeichne die Potenzmenge von X.
$I \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist ein Ideal auf X, wenn
- $A, B \in I \;\rightarrow\; A \cup B \in I$, und
- $A \in I \;\&\; B \subseteq A \;\rightarrow\; B \in I$.

I ist κ-vollständig, wenn
- I abgeschlossen ist unter Vereinigungen der Größe $< \kappa$, d.h. für $\alpha < \kappa$ und $(A_\beta)_{\beta<\alpha}$, $A_\beta \in I$ gilt: $\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta \in I$.

$F \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist ein Filter auf X, wenn
- $A, B \in F \;\rightarrow\; A \cap B \in F$, und
- $A \in F \;\&\; B \supseteq A \;\rightarrow\; B \in F$.

F ist κ-vollständig, wenn
- F abgeschlossen ist unter Schnitten der Größe $< \kappa$, d.h. für $\alpha < \kappa$ und $(A_\beta)_{\beta<\alpha}$, $A_\beta \in F$ gilt: $\bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta \in F$.

Statt $\aleph_1$-vollständig sagen wir auch σ-vollständig. Ein σ-vollständiges Ideal heißt auch σ-Ideal.

Beispiel 1: Zeige:
i) Wenn I ein Ideal ist, dann ist $\mathrm{DF}(I) := \{A \subseteq X : \; X \setminus A \in I\}$ ein Filter.
ii) Wenn F ein Filter ist, dann ist $\mathrm{DI}(F) := \{A \subseteq X : \; X \setminus A \in F\}$ ein Ideal.
iii) $\mathrm{DI}(\mathrm{DF}(I)) = I$, $\mathrm{DF}(\mathrm{DI}(F)) = F$.

Beispiel 2: Zeige: $\mathrm{DF}(I)$ ist κ-vollständig gdw I κ-vollständig ist. $\mathrm{DI}(F)$ ist κ-vollständig gdw F κ-vollständig ist.

Beispiel 3: Eine Menge $A \subseteq [0,1]$ ist Lebesgue-Null ($A \in \mathrm{LN}$), wenn es für jedes $\epsilon > 0$ eine Folge $(O_n)_{n\in\omega}$ rationaler Intervalle gibt s.d. $A \subseteq \bigcup_{n\in\omega} O_n$ und $\sum_{n\in\omega} \mathrm{length} O_n < \epsilon$. Dabei bezeichnet $\mathrm{length} O_n$ die Länge des Intervalls.
i) (+) Zeige: LN ist ein σ-Ideal.
ii) (+: benötigt den Begriff des Lebesgue-Maßes) Was ist der korrespondierende Filter?

Definition: Für ein Ideal I auf X ist $I^+ = \{A \subseteq X : \; A \notin I\}$.

Beispiel 4: Zeige: $A \in I^+$ gdw $A \cap B \neq \emptyset$ für alle $B \in \mathrm{DF}(I)$.

Beispiel 5: (+: benötigt den Begriff des äußeren Lebesgue-Maßes) Was ist LN^+?

Beispiel 6: (benötigt Beispiel 5) Zeige: Es gibt zwei disjunkte Mengen in LN^+.

Definition: Sei δ Limesordinalzahl. $C \subseteq \delta$ heißt club, wenn
- wenn $\alpha < \delta$ und $C \cap \alpha$ unbeschränkt in α, dann ist $\alpha \in C$, und
- für alle $\alpha < \delta$ gibt es ein $\beta \in C \setminus \alpha$.

Beispiel 7: (+) $\mathrm{cf}(\delta) = \omega$, dann gibt es zwei disjunkte club Mengen.

Fortsetzung auf nächster Seite:

Beispiel 8: $C \subseteq \delta$ ist club ist äquivalent zu: es gibt ein $\alpha \leq \delta$ und ein $f : \alpha \to \delta$ streng monoton wachsend, stetig, und cofinal mit $C = f''\lambda$.

(f heißt stetig wenn $f(\delta) = \sup(f(\alpha : \alpha < \delta))$ für δ Limesordinalzahl.)

Beispiel 9: (+) Sei $f : \alpha \to \delta$ streng monoton wachsend und stetig und $\gamma < \delta$ Limesordinalzahl. Dann ist $\mathrm{cf}(f(\gamma)) = \mathrm{cf}(\gamma)$.

Annahme: Von nun an sei $\mathrm{cf}(\delta) > \omega$.

Definition: $A \subseteq \delta$ ist im Clubfilter, wenn $A \supseteq C$ für eine club Menge C.

Beispiel 10: (+) Zeige: Es gibt eine Menge im Clubfilter auf ω_1, die nicht club ist.

Beispiel 11: (+) Zeige: Der Clubfilter ist ein Filter.

Beispiel 12: (++) Zeige: Der Clubfilter ist sogar $\mathrm{cf}(\delta)$-vollständig.

Annahme: Von nun an sei δ regulär, d.h. $\mathrm{cf}(\delta) = \delta$.

Beispiel 13: (+) $C \subseteq \delta$ ist club gdw es gibt ein $f : \delta \to \delta$ streng monoton wachsend und stetig mit $C = f''\lambda$.

(Benütze Beispiel 8.)

Beispiel 14: Zeige: Wenn $g : \delta \to \delta$ streng monoton wachsend ist, dann ist $g(\alpha) \geq \alpha$.

Beispiel 15: (+) Sei $g : \delta \to \delta$ streng monoton wachsend und stetig. Dann ist $\mathrm{Fix}_g = \{\alpha : g(\alpha) = \alpha\}$ club.

Beispiel 16: $C \subseteq \delta$ ist im club Filter ist äquivalent zu: Es gibt ein $g : \delta \to \delta$ streng monoton wachsend und stetig mit $\mathrm{Fix}_g \subseteq C$.

(Folgt aus Beispiel 13: $f''\delta \supseteq \mathrm{Fix}_f$.)

Beispiel 17: (+) Sei $h : \delta \to \delta$ beliebig. $\mathrm{Fix}'_h = \{\alpha \text{ Limes} : h(\beta) < \alpha \text{ für alle } \beta < \alpha\}$ ist club.

Beispiel 18: (+) $C \subseteq \delta$ ist im club Filter ist äquivalent zu: Es gibt ein $h : \delta \to \delta$ mit $\mathrm{Fix}'_h \subseteq C$.

(Folgt aus Beispiel 13: $\mathrm{Fix}'_f \subseteq \mathrm{Fix}_f \subseteq f''\delta$.)

Definition: Das duale Ideal I zum Clubfilter heißt Ideal der nichtstationären Mengen.

Die Mengen in I^+ heißen stationär.

Beispiel 19: A ist stationär gdw $A \cap C \neq \emptyset$ für jede club Menge C.

Beispiel 20: Zeige: $\{\alpha < \omega_1 : \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$ ist stationär in ω_1.

Beispiel 21: Zeige: Für $\gamma < \mathrm{cf}(\delta)$ Limesordinalzahl ist $\{\alpha < \delta : \mathrm{cf}(\alpha) = \gamma\}$ stationär in δ.

Beispiel 22: Zeige: Es gibt zwei disjunkte stationäre Mengen auf ω_2.