Axiomatische Mengenlehre I, WS 2005/2006
6. Übung, 2005-11-17

Definition: $\mathrm{cf}(\alpha)$ bezeichne die Konfinalität von α.

Eine Kardinalzahl κ heißt regulär, wenn $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$. Ansonsten heißt κ singulär. Jede Nachfolger-Kardinalzahl ist regulär (Beweis in der Vorlesung).

Wenn $(X, <)$ eine Wohlordnung ist, dann sei $\mathrm{otp}(X, <)$ ihr Ordnungstyp (eine Ordinalzahl). Falls $X \subseteq \alpha$ für eine Ordinalzahl α dann setze $\mathrm{otp}(X) = \mathrm{otp}(X, \in)$.

Beispiel 1: κ, λ seien Kardinalzahl. Zeige:

i) $\{\mathrm{otp}(\kappa, \lhd) : \lhd \text{ ist Wohlordnung auf } \kappa\} = \{\alpha : \kappa \leq \alpha < \kappa^+\}$.

ii) Wenn $A \subseteq B \subseteq \lambda$, dann ist $\mathrm{otp}(A) \leq \mathrm{otp}(B) \leq \lambda$.

iii) $\{\mathrm{otp}(X) : X \subseteq \lambda\} = \lambda \cup \{\lambda\}$.

Beispiel 2: Sei κ regulär und $(\kappa, \lhd)$ eine Wohlordnung. Zeige: Es gibt ein $X \subseteq \kappa$ s.d.:
$|X| = \kappa$, und auf X stimmt die Ordnung $\lhd$ mit der Ordnung $\in$ überein.

Hinweis: Konstruiere X als aufsteigende Folge mit transfiniter Induktion der Länge κ.

Beispiel 3: Wenn κ singulär ist, dann ist $\lambda = \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ und κ ist disjunkte Vereinigung $\bigcup_{i \in \lambda} A_i$, $|A_i| < \kappa$ regulär.

Beispiel 4: Beweise den Satz aus Beispiel 2 für beliebige Kardinalzahlen κ.

Hinweis: Wenn κ singulär ist, dann ist $\lambda = \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$. Benütze Beispiel 3, und finde mit transfiniter Induktion der Länge λ finde $X_i \subseteq A_i$.

Beispiel 5: Zeige: Sei λ Kardinalzahl, $\beta < \lambda$ und $\alpha = \beta^\omega$ (Ordinalzahl-Exponentiation). Zeige: $\alpha < \lambda$.

Beispiel 6: Wenn $(A_i)_{i \in \kappa}$ s.d. $A_i \subseteq \kappa^+$ und $\mathrm{otp}(A_i) < \beta$, dann ist $\mathrm{otp}(\bigcup_{i \in \omega} A_i) < \beta \cdot \kappa$.

Beispiel 7: Rado-Milner Paradoxon: Sei $\kappa \leq \alpha < \kappa^+$ und setze $\beta_n = \kappa^n$ (Ordinalzahl-Exponentiation). Zeige: Es gibt $(X_i)_{i \in \omega}$ s.d.:
$X_n \subseteq \alpha$, $\mathrm{otp}(X_n) \leq \beta_n$, und $\alpha = \bigcup_{n \in \omega} X_n$.

Hinweis: Induktion nach α. Der Nachfolge-Schritt ist sehr einfach. Für den Limes-Schritt, verwende Beispiel 5.