Axiomatische Mengenlehre I, WS 2005/2006
3. Übung, 2005-10-27

Definition: A heißt transitiv, wenn $(x \in A \,\&\, y \in x) \to y \in A$.

$(A, \leq_A)$ ist eine partielle Ordnung (oder: Halbordnung), wenn $\leq_A$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

Eine partielle Ordnung $(A, \leq_A)$ ist total (oder: linear), wenn $a \leq b$ oder $b \leq a$ für alle $a, b \in A$.

Eine lineare Ordnung $(A, \leq_A)$ heißt Wohlordnung, wenn für jede nichtleere Teilmenge B von A die induzierte Ordnung $(B, \leq_A \cap B \times B)$ ein kleinstes Element hat.

α ist Ordinalzahl wenn transitiv und $(\alpha, \in)$ Wohlordnung.

Beispiel 1: : Zeige: α ist Ordinalzahl genau dann wenn α transitiv ist und $(\alpha, \in)$ eine totale Ordnung.

Definition: Wenn $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ (partielle) Ordnungen sind, dann ist $(A, \leq_A) + (B, \leq_B)$ das folgendermaßen definierte Paar $(C, \leq_C)$:
$C = \{(0, a) : a \in A\} \cup \{(1, b) : b \in B\}$,
$(0, a) \leq_C (1, b)$ für alle $a \in A$, $b \in B$, $(0, a) \leq_C (0, a')$ genau dann wenn $a \leq_A a'$, und $(1, b) \leq_C (1, b')$ genau dann wenn $b \leq_B b'$.

Beispiel 2: Zeige:
- $(A, \leq_A) + (B, \leq_B)$ ist eine partielle Ordnung.
- Wenn $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ total (d.h. linear) sind, dann ist $(A, \leq_A) + (B, \leq_B)$ total.
- Wenn $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ Wohlordnungen sind, dann ist $(A, \leq_A) + (B, \leq_B)$ Wohlordnung.

Beispiel 3: Zeige: Im allgemeinen ist $(A, \leq_A) + (B, \leq_B)$ ungleich $(B, \leq_B) + (A, \leq_A)$.

Definition: Wenn $(A, \leq_A)$ eine Wohlordnung ist, dann gibt es eine eindeutige Ordinalzahl α s.d. es eine bijektive ordnungserhaltende Funktion $f : (A, \leq_A) \to (\alpha, \in)$ gibt. Dieses α nennt man auch Ordnungstyp von $(A, \leq_A)$ und schreibt es $\mathrm{otp}(A, \leq_A)$.

Wenn α, β Ordinalzahlen sind, dann definieren wir $\alpha + \beta$ als $\mathrm{otp}((\alpha, \in) + (\beta, \in))$.

Beispiel 4:
- Was ist $1 + \omega$? Was ist $2 + \omega$?
- Was ist $\omega + 1$? Was ist $\omega + 2$?
- Was ist $\omega + 1 + \omega$?

Definition: Für Ordinalzahlen α, β heißt $\alpha < \beta$ daß $\alpha \in \beta$ (oder äquivalent: α ist ein Anfangsabschnitt von β). In der Vorlesung wurde gezeigt: $\alpha < \beta$ oder $\alpha = \beta$ oder $\beta < \alpha$.

Beispiel 5: Für die folgenden Beispiele verwende transfinite Induktion.
- Zeige: Wenn $\alpha < \beta$, dann $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$.
- Zeige: Wenn $\alpha < \beta$, dann $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$. Gilt auch $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$?

Beispiel 6: Zeige: Wenn $\alpha \leq \beta$, dann gibt es genau eine Ordinalzahl γ so daß $\alpha + \gamma = \beta$. Gibt es auch eine Ordinalzahl so daß $\gamma + \alpha = \beta$?