Axiomatische Mengenlehre I, WS 2005/2006
2. Übung, 2005-10-20

Legende:

(+)	Die Aufgabe ist nicht trivial.
(++)	Eine etwas schwierigere Aufgabe.
(+++)	Benötigt Theorie die in der Vorlesung noch nicht besprochen wurde.

Definitions: $A \preceq B$ heißt: Es gibt ein injektives $f : A \to B$.
$A \preceq^* B$ heißt: A ist leer oder es gibt ein surjektives $f : B \to A$.

Zu Beispielen 1–2: : Wir haben die entsprechenden Sätze schon in der letzten Übung bewiesen. Diesmal sind die Beweise *formal* zu führen (in der Logik erster Stufe, unter Verwendung der ZF Axiome ohne Auswahlaxiom). Sie müssen die Beweise nicht im Kalül ausschreiben (das wäre viel zu lang), aber sie sollten argumentieren können warum/wie jeder ihrer Beweisschritte im Kalkül ableitbar wäre.

Beispiel 1: (+) Zeige $A \preceq B \to A \preceq^* B$.

Beispiel 2: (+) Zeige $A \preceq^* \mathbb{N} \to A \preceq \mathbb{N}$.

Beispiel 3: (++) Zeige $A \preceq^* B \to A \preceq B$. Auch hier sollten Sie bei jedem Ihrer Beweisschritte argumentieren können, warum er im first order Kalkül zulässig ist. Neben ZF können (und müssen) Sie hier auch AC verwenden (Sie können alternativ auch AC' oder das Zorn'sche Lemma verwenden, beides wird im nächsten Punkt definiert).

Definitions: Wir geben drei äquivalente Sätze zum Auswahlaxiom an:

- Wohlordnungssatz (AC): Jede Menge kann wohlgeordnet werden.
- AC': Sei A eine Menge nichtleerer Mengen. Dann gibt es eine Funktion f mit Definitionsbereich A s.d. $f(a) \in a$ für alle $a \in A$.
- Zorn'sches Lemma: Sei $(A, \leq)$ eine nichtleere Halbordnung, in der jede Kette eine obere Schranke hat. Dann hat A ein maximales Element.

$(A, \leq)$ ist eine Halbordnung wenn $\leq$ eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation auf A ist (antisymmetrisch: $a \leq b \,\&\, b \leq a \;\to\; a = b$). Eine Kette L ist eine Teilmenge von A so daß $<$ eine lineare Ordnung auf L ist, d.h. für $l_1, l_2 \in L$ gilt entweder $l_1 \leq l_2$ oder $l_2 \leq l_1$. Eine obere Schranke von L ist ein $a \in A$ s.d. $a \geq l$ für alle $l \in L$. Ein maximales Element ist ein $a \in A$ so daß es kein $b \gneq a$ gibt (d.h. $b \geq a$ impliziert $a = b$). (Eine maximales Element ist also *nicht* notwendigerweise größer als alle anderen Elemente von A.)

Beispiel 4: (+) Zeige (halb-formal in ZF): Der Wohlordnungssatz impliziert AC'.

Beispiel 5: (+++) Zeige (halb-formal in ZF): AC' impliziert das Zorn'sche Lemma. (Hinweis: Das Beispiel benötigt transfinite Induktion, das wird in der Vorlesung erst durchgenommen. Sei $(A, \leq)$ eine geeignete Halbordnung. Nimm an es gäbe kein maximales Element. Sei R eine Wohlordnung auf A. a_0 sei das R-minimal in A. Angenommen die Kette $\{a_\alpha : \alpha < \beta\}$ sei schon definiert. Dann sei a_β die R-kleinste obere Schranke dieser Kette.)

Beispiel 6: (+) Zeige (halb-formal in ZF): Das Zorn'sche Lemma impliziert den Wohlordnungssatz. (Hinweis: betrachte die Halbordnung aller Wohlordnungen auf Teilmengen von A.)