Axiomatische Mengenlehre I, WS 2005/2006
1. Übung, 2005-10-13

Legende:

(+) Die Aufgabe ist nicht trivial.
(++) Eine etwas schwierigere Aufgabe.
(+++) Benötigt Theorie die in der Vorlesung noch nicht besprochen wurde.

Es sollten im gesamten Semester $\geq 0.6 \cdot n$ Beispiele angekreuzt werden, wobei n die Gesamtzahl derjenigen Beispiele ist, die nicht mit (+++) markiert sind. (Der Beitrag dieses Übungsblattes zu n ist z.B. 4: 6 Beispiele, aber Bsp 3 und Bsp 6 sind zu schwer.)

Definition: $A \preceq B$ heißt: Es gibt ein injektives $f : A \to B$.

Beispiel 1: Zeige (für beliebige Mengen A, B):

i) $A \preceq A$.
ii) Wenn $A \preceq B$ und $B \preceq C$, dann $A \preceq C$.
iii) $\mathbb{N} \preceq \mathbb{Q} \preceq \mathbb{N}^2 = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}$.
iv) $\mathbb{N}^2 \preceq \mathbb{Q} \preceq \mathbb{N}$.

Definition: $A \preceq^* B$ heißt: A ist leer oder es gibt ein surjektives $f : B \to A$.
$2^{\mathbb{N}} = \{(a_0, a_1, \dots) : a_i \in \{0, 1\}\}$.

Beispiel 2: Zeige (für beliebige Mengen A, B):

i) $A \preceq B$ impliziert $A \preceq^* B$.
ii) (+) $2^{\mathbb{N}} \preceq \mathbb{N}$ gilt *nicht* (Cantor). Das kann man auch $2^{\mathbb{N}} \not\preceq \mathbb{N}$ schreiben. (Siehe Hinweis 1.)

Beispiel 3: i) Zeige: $A \preceq^* \mathbb{N}$ impliziert $A \preceq \mathbb{N}$.
ii) (+++) Gilt $A \preceq^* \mathbb{R}$ impliziert $A \preceq \mathbb{R}$?

Beispiel 4: Zeige:

i) (+) $2^{\mathbb{N}} \preceq \mathbb{R}$.
ii) (+) $\mathbb{R} \preceq 2^{\mathbb{N}}$.

Definition: $A \cong B$ heißt: Es gibt ein bijektives $f : A \to B$.

Beispiel 5: Zeige:

i) $A \cong B$ impliziert $A \preceq B$.
ii) (++) Wenn $A \preceq B$ und $B \preceq A$, dann $A \cong B$ (Cantor-Schröder-Bernstein). (Siehe Hinweis 2.)

Beispiel 6: (+++) Gilt immer: $A \preceq B$ oder $B \preceq A$?

Hinweise:

1. Benutze Beispiel 2i. Nimm also an, es gäbe $\phi : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ surjektiv. Schreibe ϕ als Folge von 0-1-Folgen und betrachte die Diagonale.
2. Seien $f : A \to B$ und $g : B \to A$ beide injektiv. Wir suchen ein $h : A \to B$ bijektiv.

   Wir schreiben $f''X$ für $\{f(x) : x \in X\}$.

   Setze $B_1 = f''(A)$ und $A_1 = A \setminus g''(B \setminus B_1)$. Fixiere $h : A \setminus A_1 \to B \setminus B_1$ durch g^{-1}. (Skizze!) Nun wiederhole die Konstruktion mit (B_1, A_1) anstelle von (A, B). Kann nach unendlich vielen Wiederholungen zum Schluß noch ein Rest von A bzw. B übrigbleiben? Ist das ein Problem?