

# Logik und Normale Mathematik\*

Martin Goldstern

Ich danke der ÖMG dafür, daß sie mich eingeladen hat, über meine Forschung vorzutragen. Ich möchte dieses vorgegebene Thema aber ein bißchen abändern und auch Resultate von anderen erwähnen, und gleichzeitig auch die Gelegenheit ergreifen, über ein Thema zu sprechen, das mir sehr am Herzen liegt, nämlich die Lage der Logik innerhalb der Mathematik.

Leider habe ich die Erfahrung gemacht, daß die Logik oft als ein Gebiet angesehen wird, das erstens außerhalb der eigentlichen Mathematik liegt, und zweitens ihr Sinn hauptsächlich im Philosophieren über das ausgeschlossene Dritte liegt, oder daß das Wesen der Logik darin besteht, mit möglichst formalistischen Ableitungen Dingen zu beweisen, die bereits aus dem gesunden Menschenverstand folgen.

Diese Einstellung ist nicht neu, ich habe da ein Zitat ausgegraben, das schon etwa 200 Jahre alt ist:

---

erste Folie “Was ist Logik” hier einfügen

---

und wahrscheinlich kann man auch noch älteres finden.

Wenn ich im Folgenden von “Logik” spreche, meine ich das immer als Abkürzung für “Mathematische Logik”. Ich brauche mich also von diesem Goethe-Zitat nicht angesprochen fühlen, weil es ja nur von Philosophen handelt.

Ich habe dann noch ein jüngeres Zitat, auch schon 100 Jahre alt, von einem Mathematiklehrer:

---

Zweite Folie “Was ist Logik”, oberer Teil

---

Wie gesagt, im Folgenden ist “Logik” Abkürzung für mathematische Logik. Was Mathematische Logik genau ist, möchte ich hier nicht definieren – als

---

\*Manuskript eines Vortrages, gehalten am 26. September 1997 im Rahmen einer Tagung der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

<sup>0</sup>Copyright (C) 1997, Martin Goldstern

erste Approximation können wir sagen, mathematische Logik ist das, was im Zentralblatt oder in den math Reviews unter “03” geführt wird:

---

noch immer zweite Folie “Was ist Logik” (unterer Teil)

---

Die Beispiele, die ich bringen werde, sind all aus dem Gebiet der Mengenlehre, 03E – das hat keinen tiefen philosophischen Sinn, sondern liegt daran, daß der größte Teil meiner mathematischen Arbeit eben diesem Gebiet zuzuordnen ist.)

Die Mengenlehre wird ja leider schon in der Schule sehr stiefmütterlich behandelt – also vielleicht ist das ja jetzt anders, aber zu meiner Zeit, ich bin Maturajahrgang 1981, bestand Mengenlehre in der Schule darin, zusätzlich zu “ $x = 3$ ” eben auch noch die Lösungsmenge anzugeben: “ $L = \{3\}$ ”

Sie wissen natürlich, daß Mengenlehre viel mehr ist:

---

Folie “03E: Set Theory”

---

Wie schon im Titel angedeutet, möchte ich mich mit dem Verhältnis zwischen Logik und dem Rest der Mathematik befassen. Der Titel faßt eine Einstellung zusammen, die ich bei vielen Mathematikern, auch Logikern angetroffen habe, nämlich die, daß Logik irgendwie außerhalb der “normalen” Mathematik steht.

Jetzt möchte ich mich selbst aber nicht als “abnormalen” Mathematiker bezeichnen, daher muß ich den Titel es Vortrags ändern:

## Logik und “Naive” Mathematik.

“Naiv” nenne ich die Mathematik außerhalb der Logik deshalb, weil sie nicht (wie die Logik es tut) über sich selbst reflektiert – ihre Definitionen und Sätze befassen sich zum Beispiel mit Funktionen oder Vektorräumen oder irgendwelchen anderen Objekten und Strukturen, aber nicht mit Sätzen und Definitionen selbst.

Keinesfalls möchte ich hier mißverstanden werden, und ich möchte “naiv” nicht als Herabsetzung verstehen. Beachten Sie, daß ich nur von naiver Mathematik spreche, und nicht irgendwelchen Mathematikern unterstelle, naiv zu sein. (Obwohl es solche natürlich gibt)

Ich möchte also in meinem Vortrag ein paar Beispiele für Wechselwirkungen zwischen Logik und “naiver” Mathematik bringen, mit dem Ziel, sie zu überzeugen, daß es eigentlich keine klare Grenze gibt, weil insbesondere logische Methoden und Resultate auf ganz naive Fragestellungen anwendbar sind.

Ich werde drei Beispiele bringen.

---

Folie “Logik und Naive Mathematik”

---

Im ersten (welches nicht von mir ist) wird ein Satz aus der naiven Mathematik durch einen Satz motiviert, der aus der Logik kommt, im zweiten und dritten beantwortet die Logik – zumindest teilweise – eine Frage aus der naiven Mathematik, bzw weist darauf hin, wie man die Frage besser stellen könnte.

Um ihnen die Übersicht zu erleichtern, werde ich auf den folgenden Folien Farben<sup>1</sup> verwenden – mit grün kennzeichne ich Abschnitte aus der naiven Mathematik, mit rot den “logischen” Teil, aber gegen Ende werden die beiden Farben ineinanderschwimmen.

---

<sup>1</sup>Aus technischen Gründen sind Farben in diesem Ausdruck nicht verfügbar

## Erstes Beispiel: Maß und Kategorie

Das erste Beispiel ist nicht von mir, aber kommt aus einem Gebiet, in dem ich auch gearbeitet habe, nämlich “Kardinalzahlinvarianten des Kontinuums”.

### $\mathfrak{b}(P)$ – die “bounding number”

Für jede Halbordnung  $(P, <)$  definieren wir

$$\mathfrak{b}(P) := \min\{\#A : A \subseteq P, \text{ } A \text{ unbeschränkt in } P\}$$

Dieses Symbol  $\#A$  bedeutet “Kardinalität” von  $A$ . Sie kennen sicher alle diesen grundlegenden Begriff aus der Mengenlehre – zwei Mengen haben die gleiche Kardinalität, wir sagen auch: “sind gleichmächtig”, wenn es eine Bijektion zwischen ihnen gibt. Eine Menge  $A$  ist mächtiger als eine Menge  $B$ , wenn sich  $B$  in  $A$  injektiv einbetten läßt, und strikt mächtiger, wenn zwar  $A$  mächtiger als  $B$  ist, aber nicht umgekehrt.

Das ergibt eine Quasihalbordnung zwischen allen Mengen, und man kann zeigen, daß man nach Ausfaktorisieren der Gleichmächtigkeit sogar eine Wohlordnung bekommt, also eine lineare Ordnung, in der jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element hat. All dies sage ich nur deshalb, um dieses “min” zu rechtfertigen.

Machen wir gleich ein nichttriviales Beispiel:

---

Erste Folie zur Maß und Kategorie

---

### $\mathfrak{b}(\mathcal{N})$ — “Additivity of Measure”

Sei  $\mathcal{N}$  das Ideal der Lebesgue-Nullmengen in den reellen Zahlen, geordnet durch Inklusion. Das ist also eine Struktur, die sicher aus der naiven Mathematik kommt.

$\mathfrak{b}(\mathcal{N})$  ist die Antwort auf die Frage: Wieviele Nullmengen muß man vereinigen, um eine Menge von positivem äußeren Maß zu bekommen?

Offensichtlich ist  $\aleph_0 < \mathfrak{b}(\mathcal{N}) \leq 2^{\aleph_0}$ , wobei  $2^{\aleph_0}$  die “Kardinalität des Kontinuums” also der reellen Zahlen ist.

Die Frage nach der Größe von Kardinalität  $\mathfrak{b}(\mathcal{N})$  möchte ich zumindest für die Dauer dieses Vortrags der Logik, genauer der Mengenlehre zuordnen.

Formal würde ich den Begriff der Kardinalität der naiven Mathematik zuordnen, aber “soziologisch” gehört er (meiner Meinung nach da nicht hinein – aber ich kenne genügend viele Mathematiker, für die Kardinalität bei

endlich, abzählbar ueberabzählbar

aufhoert.

## $\mathfrak{b}(\mathcal{M})$ – “Additivity of Category”

Analog sei  $\mathcal{M}$  das Ideal der mageren Mengen (= Mengen von erster Kategorie).  $\mathfrak{b}(\mathcal{M})$  ist die kleinste Anzahl von mageren (oder: nirgends dichten) Mengen, deren Vereinigung von zweiter Kategorie ist.

$\mathfrak{b}(\mathcal{M})$  ist natürlich auch überabzählbar.

Wiederum entstammt  $\mathcal{M}$  der naiven Mathematik, und  $\mathfrak{b}(\mathcal{M})$  eher nicht.

Eine typisch mengentheoretische Fragestellung ist nun die folgende:

## Was ist die Beziehung zwischen $\mathfrak{b}(\mathcal{M})$ und $\mathfrak{b}(\mathcal{N})$ ?

In der naiven Mathematik sagt man manchmal, wenn es die Sache erleichtert: “na gut, nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Kontinuumshypothese an” – dann wären diese beiden Kardinalzahlen natürlich gleich, aber das ist unfair – so als ob wir uns mit Hauptreihen beschäftigen wollen, aber uns auf kommutative Gruppen beschränken.

Es wäre aber nicht nur unfair, sondern auch ein Fehler, wie ich im im folgenden demonstrieren möchte.

## Der Satz von Bartoszyński [Logik]

In den frühen 80ern hat nun Bartoszyński den folgenden Satz bewiesen:

$$\mathfrak{b}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{b}(\mathcal{M})$$

So weit, so logisch. Was hat das mit naiver Mathematik zu tun?

## Die Relation $P \prec Q$

Nun, woran kann es liegen, daß so eine Beziehung  $\mathfrak{b}(P) \leq \mathfrak{b}(Q)$  gilt?

---

Zweite Folie zur Maß und Kategorie

---

Ein trivialer Fall ist der, daß  $P$  ein Faktor von  $Q$  ist. Wenn  $Q$  von der Form  $P * R$  ist, dann ist natürlich  $\mathfrak{b}(P) \leq \mathfrak{b}(Q)$ , weil jede unbeschränkte Menge in  $P$  sofort eine unbeschränkte Menge in  $Q$  liefert.

Wie funktioniert das? Es gibt eine Abbildung  $e$  (“Einbettung”), die  $P$  in  $Q$  abbildet, und jede unbeschränkte Mengen von  $P$  auf eine unbeschränkte Menge von  $Q$  abbildet. Wenn  $A$  Teilmenge von  $P$ , und  $e[A]$  in  $Q$  durch ein  $q$  beschränkt ist, dann ist gibt es  $\pi(q)$  (“Projektion”), welches  $A$  beschränkt. Dadurch motiviert, definieren wir folgendes:

Seien  $(P, <)$  und  $(Q, <)$  Halbordnungen.  $P \prec Q$  bedeutet:

Es gibt Funktionen  $e, \pi$ :

$$\begin{array}{l} e : P \rightarrow Q \\ P \leftarrow Q : \pi \end{array}$$

sodaß gilt:

Wenn  $e(p) \leq q$ , dann  $p \leq \pi(q)$ .

Natürlich gilt: Wenn  $P \prec Q$ , dann  $\mathfrak{b}(P) \leq \mathfrak{b}(Q)$ .

### Der Satz von Fremlin [naive Mathematik]

Nun hat angesichts von Bartoszyński's Resultat Fremlin den folgenden Satz bewiesen, den ich der naiven Mathematik zuordne:

$$\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$$

und die Funktionen  $e$  und  $\pi$  sind kanonisch definierbar.

Der Beweis ist einfach eine Übersetzung des Satzes von Bartoszyński.

### Erstes Beispiel – Schlußfolgerung

Das ist also ein Beispiel eines Satzes aus der naiven Mathematik, den es wahrscheinlich nicht gäbe, wenn wir automatisch der Einfachheit halber immer die Kontinuumshypothese annähmen. (Das ist hier als historische Bemerkung zu verstehen – der Satz wäre natürlich auf jeden Fall wahr, aber die Motivation, ihn zu beweisen und überhaupt zu formulieren, ist aus der Mengenlehre gekommen. Mit anderen Worten: Eine Methode, die ursprünglich in der mathematischen Logik angewendet wurde, hat sich als naiv anwendbar entpuppt.)

Unter anderem lernen wir auch folgende Lektion: Wenn wir einfach die Kontinuumshypothese als normal angenommen hätten, hätten wir nie das Resultat von Bartoszyński und vielleicht auch nicht das von Fremlin bekommen. Also:

Warnung des Vortragenden:  
Die Anwendung der Kontinuumshypothese  
kann das Erkennen von Zusammenhängen behindern!

## Zweites Beispiel: Verbände

Mein zweites Beispiel ist jüngerem Datums, nämlich aus diesem Jahr.

---

Folie zur Algebra

---

### Polynome

Sie alle kennen den Begriff des Verbandes, das ist eine Halbordnung in der es zu je zwei Elementen  $a, b$  eine kleinste obere ( $a + b$ ) und eine größte untere ( $a \cdot b$ ) Schranke gibt. Wir betrachten einen Verband als algebraische Struktur mit zwei Operationen, dann haben wir automatisch den Begriff des “Polynoms” — das ist das, was wir bekommen, wenn wir diese Operation iterieren und auch Konstante, also Koeffizienten zulassen – z.B. ist

$$p(x, y) = ((x + a) \cdot b) + (x + y)$$

ein Polynom.

Es ist eine grundlegende Frage in der universellen Algebra, das Verhalten von Polynomen zu verstehen. Wenn der Verband zum Beispiel distributiv ist, dann können wir Polynome in einer Art Normalform darstellen, so wie über kommutativen Ringen.

### Ordnungspolynomvollständige Verbände

Nachdem die beiden grundlegenden Operationen monotone Funktionen sind, also die Ordnung respektieren, ergibt sich, daß alle Verbandspolynome monotone Funktionen induzieren. Da stellt sich natürlich sofort die Frage: Kann es sein, daß umgekehrt alle monotonen Funktionen durch Polynome induziert werden? Verbände, die diese Eigenschaft haben, heißen “ordnungspolynomvollständig”, ich kürze das mit “o.p.c” ab.

Gibt es solche Verbände? Im Endlichen ja, und diese sind auch gut untersucht.

Es bleibt also noch die folgende Frage:

### Gibt es einen unendlichen o.p.c. Verband?

Die naive Mathematik hat bisher kein Ergebnis geliefert. Das ist natürlich eine Untertreibung, es gibt viele Resultate, die alle sagen: Wenn ein Verband so-und-so ist, dann ist er nicht o.p.c. Zum Beispiel können Sie sich zu Fuß überlegen, daß etwa eine lineare Ordnung sicher nicht op.c ist, weil die Polynome alle ganz triviale Operationen sind. Allgemeiner kann man zeigen, daß ein op.c Verband einfach sein muß, also keine nichttrivialen homomorphen Bilder haben darf, insbesondere nicht distributiv, etc.

## Ein halbes Bit

Soweit die naive Mathematik. Jetzt kommt die Logik, und sagt: Eigentlich besteht dieses Problem aus 2 Fragen:

1. Erstens, kann man beweisen, daß es einen unendlichen o.p.c. Verband gibt?
2. Zweitens, kann man beweisen, daß es *keinen* unendlichen o.p.c. Verband gibt?

Ich möchte hierfür den Begriff des Logikers als “**Bitspalters**” prägen, weil ich hier sozusagen ein Bit an Information noch einmal in zwei Teile aufgespalten habe. Sie können das entweder als mächtiges Werkzeug, wie die Atomspaltung sehen, oder, wenn es Ihnen nicht gefällt, als Variation des Haarspalters.

Sie denken jetzt vielleicht, daß so eine Spaltung unsinnig ist, denn wenn man die eine Frage mit “ja” beantworten kann, dann ist die Antwort auf die andere natürlich “nein”. Die Umkehrung gilt aber nicht — es ist durchaus vorstellbar, daß die Antwort auf beide Fragen “nein” ist.

## Ramsey, Erdős+Rado, und Gödel

Vor ein paar Monaten konnten Saharon Shelah und ich zeigen, daß man die Existenz eines opc Verbandes nicht in der üblichen Mengenlehre ZFC beweisen kann, nicht einmal unter Annahme der Kontinuumshypothese. Man verwendet dabei unter anderem erstens eine Version des Satzes von Ramsey für sehr große überabzählbare Mengen (die auf Erdős und Rado zurückgeht) und zweitens kann man den Gödelschen Unvollständigkeitssatz einsetzen, das ist also beides weit im “roten” Gebiet.

Man kann nämlich zeigen, daß die Kardinalität eines unendlichen opc Verbandes eine unerreichbare Kardinalzahl sein muß. Aus der Existenz eine so großen Kardinalzahl folgt aber die Widerspruchsfreiheit der üblichen Mengenlehre, und seit Gödel wissen wir, daß sich diese nicht in der üblichen Mengenlehre beweisen läßt.

## Zweites Beispiel – Schlußfolgerung

Das möchte ich gerne als weiteren Erfolg für die Logik verbuchen, weil hier nämlich eine Methode aus der Logik, genauer aus der Mengenlehre, eine Frage aus der naiven Mathematik zumindest teilweise beantwortet hat.

Ich habe über dieses Resultat bei eine Algebra-Konferenz vorgetragen, und habe naiverweise — sie sehen, auch ein Logiker kann naiv sein — ich habe also erwartet, daß die Algebraiker aufschrecken werden und sagen: “Aha, wir werden jetzt also alle Mengenlehre lernen, weil wir das für Probleme in der Algebra brauchen.” Statt dessen hat man mir gesagt: “Na ja, die Sache ist für uns erledigt, jetzt ist es **Ihr** Problem...”

Das war nun insofern kein gutes Beispiel, weil ja hier die Logik zwar einen Fortschritt, aber keine Lösung geliefert hat.



## Drittes Beispiel: Gleichverteilung/Maßtheorie

Als letztes Beispiel möchte ich meinen Lieblingssatz anführen, wo mir ein Satz aus der Logik nämlich geholfen hat, ein Problem zu lösen, das aus der Theorie der Gleichverteilung oder der Maßtheorie kommt. (Später hat sich dann herausgestellt, daß man auch einen klassischen Satz aus der naiven Mathematik verwenden kann, aber so wie andere von “Erkenntnisvorlauf der Mathematik” sprechen, kann ich hier einen Erkenntnisvorlauf der Logik beanspruchen.)

Über Gleichverteilung haben Sie ja vielleicht schon einiges in anderen Vorträgen gehört, aber ich möchte noch einmal die wichtigsten Definitionen bringen:

### Normale Zahlen/Gleichverteilte Folgen

Es ging um folgendes Problem: Sie wissen vielleicht, was eine “normale” Zahl ist: Das ist eine reelle Zahl, in deren Dezimaldarstellung nicht nur alle Ziffern in gewissem Sinn “gleich oft” vorkommen, sondern auch alle Ziffernpaare, alle Zifferntripel, etc. Ich spreche im Folgenden nur von Normalität zur Basis 10.

Formal macht man das so:

---

1. Folie zur Gleichverteilung/Maßtheorie:

---

Nachdem wir uns sowieso nur für die Nachkommastellen interessieren, ersetzen wir eine Zahl einfach durch eine unendliche Ziffernfolge, und statt “normal” sagt man dann üblicherweise “gleichverteilt”.

Ich arbeite hier mit der Basis 10, wenn es Ihnen lieber ist, können sie alles durch die Basis 2 ersetzen.

Sie sehen hier auf dieser Folie die Definition der Gleichverteilung – man schaut sich die ersten  $N$  Elemente der Folge an, jede Ziffer sollte ungefähr  $N$  Zehntel mal vorkommen, man mißt die Abweichung davon und läßt  $N$  gegen unendlich gehen. Nach dem Gesetz der großen Zahlen sind fast alle Folgen gleichverteilt. (“fast alle” im Sinne des Produktmaßes auf dem Folgenraum, oder im Sinne des Lebesguemaßes auf den reellen Zahlen bzw im Einheitsintervall.)

Wenn wir statt einzelnen Ziffern  $k$ -Tupel von aufeinanderfolgenden Ziffern betrachten,

---

2. Folie zur Gleichverteilung/Maßtheorie:

---

bekommen wir den Begriff der  $k$ -Gleichverteilung. Wiederum sind fast alle Folgen  $k$ -gleichverteilt

Wieder können wir die Diskrepanz jedes Anfangsabschnittes messen, und eine Folge ist genau dann  $k$ -gleichverteilt, wenn diese  $k$ -diskrepanz gegen 0 geht.

## $s(N)$ -Gleichverteilung

Nachdem wir aber nun den Begriff der  $k$ -Diskrepanz haben, können wir uns fragen, was passiert, wenn auch diese Blocklänge gegen unendlich geht, bestimmt durch eine Funktion  $s$ .

Man sieht leicht, daß das nur für sehr langsam wachsende Funktionen  $s$  sinnvoll ist.  $s$  muß schwächer wachsen als der Logarithmus. (Logarithmus zur Basis 10, oder wenn Sie mit 0,1-Folgen arbeiten: Zur Basis 2.)

## “Langsame” Folgen

Wir definieren hier, was es für eine Folge  $s$  heißt, “genügend langsam” zu sein, nämlich:

$(\log N - \log \log N - s(N))$  divergiert gegen unendlich

und mit Hilfe von zwar naiver aber doch ziemlich tiefliegender und komplizierter Mathematik – erzeugende Funktionen, Residuen, und so weiter, kann man folgenden nichttrivialen Satz beweisen:

Fast alle Folgen sind  $s$ -gleichverteilt  
genau dann, wenn:  
 $s$  ist eine langsame Folge

---

3. Folie zur Gleichverteilung/Maßtheorie:

---

Jetzt haben wir also für jedes langsame  $s$  eine Menge vom Maß 1. Wir können jetzt den Durchschnitt über alle diese Mengen bilden, und eine Folge super-gleichverteilt nennen, wenn sie für alle langsamen  $s$   $s(N)$ -gleichverteilt ist.

Es ergibt sich also die folgende Frage:

**Gibt es Folgen, die für *jedes* langsame  $s$   $s$ -gleichverteilt sind? Wenn ja, wieviele gibt es? Eine Nullmenge? Eine Menge vom Maß 1?**

Vorhin, nachdem wir gezeigt hatten, daß für jedes  $k$  fast alle Folgen  $k$ -gleichverteilt sind, hatten wir es leicht, wir haben einfach den Durchschnitt dieser abzählbar vielen 1-Mengen gebildet, und noch immer hatten wir eine 1-Menge.

Beachten Sie, daß das hier aber ein überabzählbarer Durchschnitt ist, der auch nicht durch einen abzählbaren Durchschnitt ersetzt werden kann.

Antwort auf die Frage gibt der folgende

### Satz (über die Vereinigung von Nullmengen) [naiv]

Sei  $N^N$  die Menge aller Funktionen von den natürlichen Zahlen in sich selbst. (Diese Menge ist durch die punktweise Ordnung halbgeordnet)

Sei  $(B_f : f \in N^N)$  eine Borel-Familie von Nullmengen.

Wenn diese Familie monoton ist, (also aus  $f < g$  die Beziehung  $B_f \subseteq B_g$  folgt)

dann ist die Vereinigung aller  $B_f$  noch immer eine Nullmenge.

Hier sehen wir, daß eine überabzählbare Vereinigung von Lebesgue-Nullmengen unter gewissen Umständen wieder eine Lebesgue-Nullmenge liefert. Der Korollar folgt dann durch triviale Umformungen.

So wie er da steht, gehört der Satz sicher zur naiven Mathematik, also was hat das mit meinem Vortragstitel zu tun? Nun ja, der erste Beweis, den ich für diesen Satz gefunden habe, war rein mengentheoretischer Natur. Ich kann natürlich in so einem Vortrag keine Beweise bringen, außerdem habe ich keine Zeit mehr, ich lege also nur rasch die letzte Folie auf

### Beweis des obigen Satzes [Logik]

---

4. Folie zur Gleichverteilung/Maßtheorie:

---

wo der vollständige Beweis des Satzes dasteht, genau so, wie ich ihn veröffentlicht habe (mit ein paar Änderungen, um die Notation anzupassen). Ohne den Beweis jetzt im Detail druchzugehen, sehen Sie hier, daß an mehreren Stellen Logik eingesetzt wird, und zwar schwere Geschütze, daß aber der ganze Beweis von der Struktur her recht einfach ist.

---

---

Dieser Vortrag kann auf meiner homepage im World-Wide-Web gefunden werden, unter <http://info.tuwien.ac.at/goldstern/> an der Technischen Universität Wien.

Kommentare zum Vortrag können an [goldstern@tuwien.ac.at](mailto:goldstern@tuwien.ac.at) geschickt werden.