Klone auf endlichen und unendlichen Mengen

Martin Goldstern

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
TU Wien

31. Oktober 2008

Outline

Outline

Klone

Definition

Sei $X \neq \emptyset$. Wir schreiben $\mathscr{O}^{(n)}$ für die Menge aller n-stelligen Funktionen auf X: $\mathscr{O}^{(n)} = X^{X^n}$. Sei $\mathscr{O} = \mathscr{O}_X = \bigcup_{n=1,2,\ldots} \mathscr{O}^{(n)}$.

Klone

Definition

Sei $X \neq \emptyset$. Wir schreiben $\mathscr{O}^{(n)}$ für die Menge aller n-stelligen Funktionen auf X: $\mathscr{O}^{(n)} = X^{X^n}$. Sei $\mathscr{O} = \mathscr{O}_X = \bigcup_{n=1,2,\ldots} \mathscr{O}^{(n)}$. Ein Klon auf X *ist eine Menge $C \subseteq \mathscr{O}$, die alle Projektionsfunktionen $\pi_k^n : X^n \to X$ enthält und unter Einsetzung (Substitution) abgeschlossen ist.*

Klone

Definition

Sei $X \neq \emptyset$. Wir schreiben $\mathscr{O}^{(n)}$ für die Menge aller n-stelligen Funktionen auf X: $\mathscr{O}^{(n)} = X^{X^n}$. Sei $\mathscr{O} = \mathscr{O}_X = \bigcup_{n=1,2,\dots} \mathscr{O}^{(n)}$. Ein Klon auf X *ist eine Menge $C \subseteq \mathscr{O}$, die alle Projektionsfunktionen $\pi^n_k : X^n \to X$ enthält und unter Einsetzung (Substitution) abgeschlossen ist.*

Äquivalent: Ein Klon ist die Menge aller Termfunktionen einer universellen Algebra auf der Grundmenge X.

Klone

Definition

Sei $X \neq \emptyset$. Wir schreiben $\mathscr{O}^{(n)}$ für die Menge aller n-stelligen Funktionen auf X: $\mathscr{O}^{(n)} = X^{X^n}$. Sei $\mathscr{O} = \mathscr{O}_X = \bigcup_{n=1,2,\dots} \mathscr{O}^{(n)}$.
Ein Klon auf X ist eine Menge $C \subseteq \mathscr{O}$, die alle Projektionsfunktionen $\pi^n_k : X^n \to X$ enthält und unter Einsetzung (Substitution) abgeschlossen ist.

Äquivalent: Ein Klon ist die Menge aller Termfunktionen einer universellen Algebra auf der Grundmenge X.

Bemerkung

Die Menge aller Klone auf X bildet einen vollständigen Verband: **CLONE**(X).

Klone

Definition

Sei $X \neq \emptyset$. Wir schreiben $\mathcal{O}^{(n)}$ für die Menge aller n-stelligen Funktionen auf X: $\mathcal{O}^{(n)} = X^{X^n}$. Sei $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X = \bigcup_{n=1,2,\dots} \mathcal{O}^{(n)}$. Ein Klon auf X ist eine Menge $C \subseteq \mathcal{O}$, die alle Projektionsfunktionen $\pi^n_k : X^n \to X$ enthält und unter Einsetzung (Substitution) abgeschlossen ist.

Äquivalent: Ein Klon ist die Menge aller Termfunktionen einer universellen Algebra auf der Grundmenge X.

Bemerkung

Die Menge aller Klone auf X bildet einen vollständigen Verband: **CLONE**(X).

Definition: Für $C \subseteq \mathcal{O}$ sei $\langle C \rangle$ der von C erzeugte Klon.

Beispiele

- Die Menge aller stetigen Operationen auf einem topologischen Raum. (Operation=endlichstellige Funktion. Produkttopologie)

Beispiele

- Die Menge aller stetigen Operationen auf einem topologischen Raum. (Operation=endlichstellige Funktion. Produkttopologie)
- Die Menge aller monotonen Operationen auf einer partiellen Ordnung. (Punktweise Ordnung)

Beispiele

- Die Menge aller stetigen Operationen auf einem topologischen Raum. (Operation=endlichstellige Funktion. Produkttopologie)
- Die Menge aller monotonen Operationen auf einer partiellen Ordnung. (Punktweise Ordnung)
- Die Menge aller Polynomfunktionen über einem Ring.

Beispiele

- Die Menge aller stetigen Operationen auf einem topologischen Raum. (Operation=endlichstellige Funktion. Produkttopologie)
- Die Menge aller monotonen Operationen auf einer partiellen Ordnung. (Punktweise Ordnung)
- Die Menge aller Polynomfunktionen über einem Ring.

- Die Menge aller Projektionsfunktionen plus alle konstanten Operationen.

Beispiele

- Die Menge aller stetigen Operationen auf einem topologischen Raum. (Operation=endlichstellige Funktion. Produkttopologie)
- Die Menge aller monotonen Operationen auf einer partiellen Ordnung. (Punktweise Ordnung)
- Die Menge aller Polynomfunktionen über einem Ring.

- Die Menge aller Projektionsfunktionen plus alle konstanten Operationen.
- $U_5(X)$: Alle Operationen auf X, die entweder nur von einer Variablen abhängen oder höchstens 5 Werte haben.

Beispiele

- Die Menge aller stetigen Operationen auf einem topologischen Raum. (Operation=endlichstellige Funktion. Produkttopologie)
- Die Menge aller monotonen Operationen auf einer partiellen Ordnung. (Punktweise Ordnung)
- Die Menge aller Polynomfunktionen über einem Ring.

- Die Menge aller Projektionsfunktionen plus alle konstanten Operationen.
- $U_5(X)$: Alle Operationen auf X, die entweder nur von einer Variablen abhängen oder höchstens 5 Werte haben.

Beispiele

- Die Menge aller stetigen Operationen auf einem topologischen Raum. (Operation=endlichstellige Funktion. Produkttopologie)
- Die Menge aller monotonen Operationen auf einer partiellen Ordnung. (Punktweise Ordnung)
- Die Menge aller Polynomfunktionen über einem Ring.

- Die Menge aller Projektionsfunktionen plus alle konstanten Operationen.
- $U_5(X)$: Alle Operationen auf X, die entweder nur von einer Variablen abhängen oder höchstens 5 Werte haben.

Klone können *von unten* (durch Erzeuger) beschrieben werden, oder *von oben* (durch Bedingungen, die alle Operationen erfüllen müssen).

Beispiele

- Die Menge aller stetigen Operationen auf einem topologischen Raum. (Operation=endlichstellige Funktion. Produkttopologie) von oben
- Die Menge aller monotonen Operationen auf einer partiellen Ordnung. (Punktweise Ordnung) von oben
- Die Menge aller Polynomfunktionen über einem Ring. von unten
- Die Menge aller Projektionsfunktionen plus alle konstanten Operationen. von unten
- $U_5(X)$: Alle Operationen auf X, die entweder nur von einer Variablen abhängen oder höchstens 5 Werte haben. von oben

Klone können *von unten* (durch Erzeuger) beschrieben werden, oder *von oben* (durch Bedingungen, die alle Operationen erfüllen müssen).

Outline

Viele Klone

Sei $X := \{0, 1, 2\}$.

Viele Klone

Sei $X := \{0, 1, 2\}$.

Dann gibt es eine Menge $F = \{f_n : n = 2, 3, 4, \ldots\}$ sodass gilt:

- f_n ist n-stellig.
- $f_n \notin \langle \{f_k : k \neq n\} \rangle$.

Daher erzeugt jede Teilmenge von F einen anderen Klon.

Viele Klone

Sei $X := \{0, 1, 2\}$.

Dann gibt es eine Menge $F = \{f_n : n = 2, 3, 4, \ldots\}$ sodass gilt:

- f_n ist n-stellig.
- $f_n \notin \langle \{f_k : k \neq n\} \rangle$.

Daher erzeugt jede Teilmenge von F einen anderen Klon.

Satz

Für $|X| \geq 3$ ist $|\mathbf{CLONE}(X)| \geq 2^{\aleph_0}$.

Sätzchen

Sei X endlich. Seien $C_0 \subseteq C_1$ Klone auf X.
Dann ist das Intervall $[C_0, C_1]$ im Klonverband

Sätzchen

Sei X endlich. Seien $C_0 \subseteq C_1$ Klone auf X.
Dann ist das Intervall $[C_0, C_1]$ im Klonverband

- *Entweder endlich,*
- *oder abzählbar,*
- *oder gleichmächtig mit $\mathbb{R}$.*

Sätzchen

Sei X endlich. Seien $C_0 \subseteq C_1$ Klone auf X.
Dann ist das Intervall $[C_0, C_1]$ im Klonverband

- *Entweder endlich,*
- *oder abzählbar,*
- *oder gleichmächtig mit $\mathbb{R}$.*

BEWEIS: Die Menge aller Klone trägt eine natürliche polnische Topologie. (Separabel, vollständig metrisierbar.)

Sätzchen

Sei X endlich. Seien $C_0 \subseteq C_1$ Klone auf X.
Dann ist das Intervall $[C_0, C_1]$ im Klonverband

- *Entweder endlich,*
- *oder abzählbar,*
- *oder gleichmächtig mit $\mathbb{R}$.*

BEWEIS: Die Menge aller Klone trägt eine natürliche polnische Topologie. (Separabel, vollständig metrisierbar.)

Das Intervall $[C_0, C_1]$ ist in dieser Topologie abgeschlossen.

Sätzchen

Sei X endlich. Seien $C_0 \subseteq C_1$ Klone auf X.
Dann ist das Intervall $[C_0, C_1]$ im Klonverband

- *Entweder endlich,*
- *oder abzählbar,*
- *oder gleichmächtig mit $\mathbb{R}$.*

BEWEIS: Die Menge aller Klone trägt eine natürliche polnische Topologie. (Separabel, vollständig metrisierbar.)

Das Intervall $[C_0, C_1]$ ist in dieser Topologie abgeschlossen.

Nach dem Satz von Cantor-Bendixson enthält jede überabzählbare abgeschlossene Menge eine perfekte Menge (somit eine homoöomorphe Kopie der Cantormenge).

Outline

Koatome

Sei X endlich. Dann gilt:

Satz

- **CLONE**(X) *hat endlich viele Koatome ("prävollständige Klone, maximale Klone").*

Koatome

Sei X endlich. Dann gilt:

Satz

- **CLONE**(X) *hat endlich viele Koatome ("prävollständige Klone, maximale Klone").*
- *Alle diese Koatome sind explizit bekannt.*

Koatome

Sei X endlich. Dann gilt:

Satz

- **CLONE**(X) *hat endlich viele Koatome ("prävollständige Klone, maximale Klone").*
- *Alle diese Koatome sind explizit bekannt.*
- *Jeder Klone $\neq \mathscr{O}$ ist in einem Koatom enthalten.*

Koatome

Sei X endlich. Dann gilt:

Satz

- **CLONE**(X) *hat endlich viele Koatome ("prävollständige Klone, maximale Klone").*
- *Alle diese Koatome sind explizit bekannt.*
- *Jeder Klone $\neq \mathscr{O}$ ist in einem Koatom enthalten.*

Koatome

Sei X endlich. Dann gilt:

Satz

- **CLONE**(X) *hat endlich viele Koatome ("prävollständige Klone, maximale Klone").*
- *Alle diese Koatome sind explizit bekannt.*
- *Jeder Klone $\neq \mathscr{O}$ ist in einem Koatom enthalten.*

Daraus erhält man einen Entscheidungsalgorithmus für die Frage

Ist $\langle C \rangle = \mathscr{O}$*?*

Koatome

Sei X endlich. Dann gilt:

Satz

- **CLONE**(X) *hat endlich viele Koatome (“prävollständige Klone, maximale Klone”).*
- *Alle diese Koatome sind explizit bekannt.*
- *Jeder Klone $\neq \mathscr{O}$ ist in einem Koatom enthalten.*

Daraus erhält man einen Entscheidungsalgorithmus für die Frage

Ist $\langle C \rangle = \mathscr{O}$?

Outline

Satz

Sei $X = \mathbb{N}$.

Satz

Sei $X = \mathbb{N}$.
Dann enthält **CLONE**(X) $2^{2^{\aleph_0}}$ *Elemente, und ebenso viele Koatome.*

Satz

Sei $X = \mathbb{N}$.
Dann enthält **CLONE**(X) $2^{2^{\aleph_0}}$ *Elemente, und ebenso viele Koatome.*

BEWEIS: Sei $I \subseteq \mathfrak{P}(X)$ maximales Ideal.
Dann ist $C_I := \{f : \{x : f(x, \ldots, x) \neq x\} \in I\}$ ein maximaler Klon, und diese C_I sind alle verschieden.

Satz

Sei $X = \mathbb{N}$.
Dann enthält **CLONE**(X) $2^{2^{\aleph_0}}$ *Elemente, und ebenso viele Koatome.*

BEWEIS: Sei $I \subseteq \mathfrak{P}(X)$ maximales Ideal.
Dann ist $C_I := \{f : \{x : f(x, \dots, x) \neq x\} \in I\}$ ein maximaler Klon, und diese C_I sind alle verschieden.

Bemerkung

$C_{\{\emptyset\}}$ *ist der Klon aller idempotenten Operationen. Das Intervall* $[C_{\{\emptyset\}}, \mathscr{O}]$ *ist (als Verband) antiisomorph zur Familie aller abgeschlossenen Teilmengen von* $\beta\mathbb{N}$.

Outline

Monoidale Intervalle

Für jeden Klon C ist $C \cap \mathscr{O}^{(1)}$ (das unäre Fragment von C) ein Untermonoid des Transformationsmonoids $(X^X, \circ)$.

Monoidale Intervalle

Für jeden Klon C ist $C \cap \mathscr{O}^{(1)}$ (das unäre Fragment von C) ein Untermonoid des Transformationsmonoids $(X^X, \circ)$.
Für jedes Monoid $M \subseteq X^X$ gibt es einen kleinsten Klon $\langle C \rangle$ und einen größten Klon $\overline{M}$ mit unärem Fragment M.
Das Intervall $[\langle C \rangle, \overline{M}]$ heißt das zu M gehörige monoidale Intervall von **CLONE**(X).

Monoidale Intervalle

Für jeden Klon C ist $C \cap \mathscr{O}^{(1)}$ (das unäre Fragment von C) ein Untermonoid des Transformationsmonoids $(X^X, \circ)$.
Für jedes Monoid $M \subseteq X^X$ gibt es einen kleinsten Klon $\langle C \rangle$ und einen größten Klon $\overline{M}$ mit unärem Fragment M.
Das Intervall $[\langle C \rangle, \overline{M}]$ heißt das zu M gehörige monoidale Intervall von $\mathbf{CLONE}(X)$.

Programm

Um den gesamten Klonverband zu analysieren, müssen wir „nur“

Monoidale Intervalle

Für jeden Klon C ist $C \cap \mathscr{O}^{(1)}$ (das unäre Fragment von C) ein Untermonoid des Transformationsmonoids $(X^X, \circ)$.
Für jedes Monoid $M \subseteq X^X$ gibt es einen kleinsten Klon $\langle C \rangle$ und einen größten Klon $\overline{M}$ mit unärem Fragment M.
Das Intervall $[\langle C \rangle, \overline{M}]$ heißt das zu M gehörige monoidale Intervall von **CLONE**(X).

Programm

Um den gesamten Klonverband zu analysieren, müssen wir „nur“

1. *Alle Monoide $M \subseteq X^X$ beschreiben.*

Monoidale Intervalle

Für jeden Klon C ist $C \cap \mathscr{O}^{(1)}$ (das unäre Fragment von C) ein Untermonoid des Transformationsmonoids $(X^X, \circ)$.
Für jedes Monoid $M \subseteq X^X$ gibt es einen kleinsten Klon $\langle C \rangle$ und einen größten Klon $\overline{M}$ mit unärem Fragment M.
Das Intervall $[\langle C \rangle, \overline{M}]$ heißt das zu M gehörige monoidale Intervall von $\mathbf{CLONE}(X)$.

Programm

Um den gesamten Klonverband zu analysieren, müssen wir „nur“

1. *Alle Monoide $M \subseteq X^X$ beschreiben.*
2. *Für jedes M das monoidale Interval $[\langle M \rangle, \overline{M}]$ beschreiben.*

Monoidale Intervalle

Für jeden Klon C ist $C \cap \mathscr{O}^{(1)}$ (das unäre Fragment von C) ein Untermonoid des Transformationsmonoids $(X^X, \circ)$.
Für jedes Monoid $M \subseteq X^X$ gibt es einen kleinsten Klon $\langle C \rangle$ und einen größten Klon $\overline{M}$ mit unärem Fragment M.
Das Intervall $[\langle C \rangle, \overline{M}]$ heißt das zu M gehörige monoidale Intervall von $\mathbf{CLONE}(X)$.

Programm

Um den gesamten Klonverband zu analysieren, müssen wir „nur“

1. *Alle Monoide $M \subseteq X^X$ beschreiben.*
2. *Für jedes M das monoidale Interval $[\langle M \rangle, \overline{M}]$ beschreiben.*

Monoidale Intervalle

Für jeden Klon C ist $C \cap \mathscr{O}^{(1)}$ (das unäre Fragment von C) ein Untermonoid des Transformationsmonoids $(X^X, \circ)$.
Für jedes Monoid $M \subseteq X^X$ gibt es einen kleinsten Klon $\langle C \rangle$ und einen größten Klon $\overline{M}$ mit unärem Fragment M.
Das Intervall $[\langle C \rangle, \overline{M}]$ heißt das zu M gehörige monoidale Intervall von **CLONE**(X).

Programm

Um den gesamten Klonverband zu analysieren, müssen wir „nur“

1. *Alle Monoide $M \subseteq X^X$ beschreiben.*
2. *Für jedes M das monoidale Interval $[\langle M \rangle, \overline{M}]$ beschreiben.*

Achtung! Monoidale Intervale können sehr kompliziert sein.

$M = X^X$, X endlich

Satz

Sei $|X| = 5$. Dann gibt es genau 6 Klone mit vollem unären Fragment. Nur einer davon ist ein Koatom.

$M = X^X$, X endlich

Satz

Sei $|X| = 5$. Dann gibt es genau 6 Klone mit vollem unären Fragment. Nur einer davon ist ein Koatom.

$$\langle X^X \rangle = U_1 \subsetneq B \subsetneq U_2 \subsetneq U_3 \subsetneq U_4 \subsetneq U_5 \subsetneq U_6 = \mathscr{O}$$

U_k ist der Klon aller Operationen, die entweder nur von einem Argument abhängen oder höchstens k Werte haben.

$M = X^X$, X abzählbar

Satz

Sei $|X| = \aleph_0$. Dann gibt es $2^{2^{\aleph_0}}$ Klone mit vollem unären Fragment. Genau 2 davon sind Koatome.

$M = X^X$, X abzählbar

Satz

Sei $|X| = \aleph_0$. Dann gibt es $2^{2^{\aleph_0}}$ Klone mit vollem unären Fragment. Genau 2 davon sind Koatome.

Erstes Koatom: T_1

Grundmenge $X = \mathbb{N}$.
Sei T_1 die Menge aller Operationen f mit

$$\exists i \exists g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\, \forall x_1, \ldots, x_k \; f(x_1, \ldots, x_k) \leq g(x_i)$$

Solche Funktionen heißen fast unär, weil ihr Wachstum nur von einem Argument abhängt.

Erstes Koatom: T_1

Grundmenge $X = \mathbb{N}$.
Sei T_1 die Menge aller Operationen f mit

$$\exists i \exists g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \, \forall x_1, \ldots, x_k \; f(x_1, \ldots, x_k) \leq g(x_i)$$

Solche Funktionen heißen fast unär, weil ihr Wachstum nur von einem Argument abhängt.
T_1 verstehen wir sehr gut:

- In der natürlichen Topologie auf der Menge aller Operationen ist T_1 eine Borelmenge.

Erstes Koatom: T_1

Grundmenge $X = \mathbb{N}$.
Sei T_1 die Menge aller Operationen f mit

$$\exists i \exists g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \, \forall x_1, \ldots, x_k \; f(x_1, \ldots, x_k) \le g(x_i)$$

Solche Funktionen heißen fast unär, weil ihr Wachstum nur von einem Argument abhängt.
T_1 verstehen wir sehr gut:

- In der natürlichen Topologie auf der Menge aller Operationen ist T_1 eine Borelmenge.
- Der Klon T_1 wird von seinen dreistelligen Operationen erzeugt.

Erstes Koatom: T_1

Grundmenge $X = \mathbb{N}$.
Sei T_1 die Menge aller Operationen f mit

$$\exists i \exists g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \, \forall x_1, \ldots, x_k \; f(x_1, \ldots, x_k) \leq g(x_i)$$

Solche Funktionen heißen fast unär, weil ihr Wachstum nur von einem Argument abhängt.
T_1 verstehen wir sehr gut:

- In der natürlichen Topologie auf der Menge aller Operationen ist T_1 eine Borelmenge.
- Der Klon T_1 wird von seinen dreistelligen Operationen erzeugt.
- Über den unären Operationen wird T_1 von der Medianfunktion $med(x, y, z)$ erzeugt: $T_1 = \langle \mathscr{O}^{(1)} \cup \{med\} \rangle$.

Erstes Koatom: T_1

Grundmenge $X = \mathbb{N}$.
Sei T_1 die Menge aller Operationen f mit

$$\exists i \exists g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \, \forall x_1, \ldots, x_k \; f(x_1, \ldots, x_k) \leq g(x_i)$$

Solche Funktionen heißen fast unär, weil ihr Wachstum nur von einem Argument abhängt.
T_1 verstehen wir sehr gut:

- In der natürlichen Topologie auf der Menge aller Operationen ist T_1 eine Borelmenge.
- Der Klon T_1 wird von seinen dreistelligen Operationen erzeugt.
- Über den unären Operationen wird T_1 von der Medianfunktion $med(x, y, z)$ erzeugt: $T_1 = \langle \mathscr{O}^{(1)} \cup \{med\} \rangle$.
- Das Intervall zwischen T_1 und seinem binären Fragment ist eine abzählbare Kette.

Zweites Koatom: T_2

Sei T_2 die Menge aller Operationen f mit:

Zweites Koatom: T_2

Sei T_2 die Menge aller Operationen f mit:

Wann immer $u_1, u_2, \ldots$ Funktionen von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ sind, die nur von einem Argument abhängen, ist die Funktion $(x, y) \mapsto f(u_1(x, y), \ldots, u_k(x, y))$ auf der Menge $\{(x, y) : x < y\}$ nicht injektiv.

Zweites Koatom: T_2

Sei T_2 die Menge aller Operationen f mit:

Wann immer $u_1, u_2, \ldots$ Funktionen von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ sind, die nur von einem Argument abhängen, ist die Funktion $(x, y) \mapsto f(u_1(x, y), \ldots, u_k(x, y))$ auf der Menge $\{(x, y) : x < y\}$ nicht injektiv.

Mit Hilfe des Satzes von Ramsey beweist man: T_2 ist Klon.

Zweites Koatom: T_2

Sei T_2 die Menge aller Operationen f mit:

Wann immer $u_1, u_2, \ldots$ *Funktionen von* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *nach* $\mathbb{N}$ *sind, die nur von einem Argument abhängen,*
ist die Funktion $(x, y) \mapsto f(u_1(x, y), \ldots, u_k(x, y))$
auf der Menge $\{(x, y) : x < y\}$ *nicht injektiv.*

Mit Hilfe des Satzes von Ramsey beweist man: T_2 ist Klon.
Muss diese Definition so kompliziert sein?

Zweites Koatom: T_2

Sei T_2 die Menge aller Operationen f mit:

Wann immer $u_1, u_2, \ldots$ Funktionen von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ sind, die nur von einem Argument abhängen, ist die Funktion $(x,y) \mapsto f(u_1(x,y),\ldots,u_k(x,y))$ auf der Menge $\{(x,y) : x < y\}$ nicht injektiv.

Mit Hilfe des Satzes von Ramsey beweist man: T_2 ist Klon.
Muss diese Definition so kompliziert sein?

- Ja. In der natürlichen (polnischen) Topologie auf der Menge aller Operationen ist T_2 keine Borelmenge.

Zweites Koatom: T_2

Sei T_2 die Menge aller Operationen f mit:

Wann immer $u_1, u_2, \dots$ Funktionen von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ sind, die nur von einem Argument abhängen, ist die Funktion $(x, y) \mapsto f(u_1(x, y), \dots, u_k(x, y))$ auf der Menge $\{(x, y) : x < y\}$ nicht injektiv.

Mit Hilfe des Satzes von Ramsey beweist man: T_2 ist Klon.
Muss diese Definition so kompliziert sein?

- Ja. In der natürlichen (polnischen) Topologie auf der Menge aller Operationen ist T_2 keine Borelmenge.
- Über den unären Operationen wird T_2 von keiner endlichen oder abzählbaren Menge erzeugt.

Zweites Koatom: T_2

Sei T_2 die Menge aller Operationen f mit:

Wann immer $u_1, u_2, \ldots$ Funktionen von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ sind, die nur von einem Argument abhängen, ist die Funktion $(x,y) \mapsto f(u_1(x,y), \ldots, u_k(x,y))$ auf der Menge $\{(x,y) : x < y\}$ nicht injektiv.

Mit Hilfe des Satzes von Ramsey beweist man: T_2 ist Klon.
Muss diese Definition so kompliziert sein?

- Ja. In der natürlichen (polnischen) Topologie auf der Menge aller Operationen ist T_2 keine Borelmenge.
- Über den unären Operationen wird T_2 von keiner endlichen oder abzählbaren Menge erzeugt.
- Wird T_2 von seinen 7-stelligen Operationen erzeugt?