

Prädikatenlogik erster Stufe und der Gödelsche Vollständigkeitsatz

Martin Goldstern

20. August 2006

Die mathematische Logik nimmt in der Mathematik eine Sonderstellung ein. Sie ist erstens ein mathematisches Gebiet wie alle anderen, in dem mit mathematischen Methoden mathematische Objekte untersucht werden; wegen des Charakters der von ihr untersuchten Objekte kann man die Logik aber auch als „Metamathematik“ bezeichnen. Anders als zB in der Gruppentheorie, in der Definitionen, Sätze und Beweise behandelt werden, die sich mit Gruppenelementen, Gruppen, Normalteilern, Automorphismen etc beschäftigen, werden in der mathematischen Logik Definitionen, Sätze und Beweise betrachtet, die sich selbst wieder mit Definitionen, Sätzen und Beweisen beschäftigen. Wenn auch jeder Mathematiker genau versteht, was ein Beweis ist, so ist es doch in der „naiven“ (also nicht selbstreflektierenden) Mathematik unüblich, Beweise als eigenständige mathematische Objekte zu untersuchen.

Der **Gödelsche Vollständigkeitsatz** zeigt, dass der zunächst informelle Begriff des Beweises tatsächlich adäquat formalisiert werden kann; erst dadurch wird eine mathematische Untersuchung von Beweisen möglich. Insbesondere wird dadurch auch die Unbeweisbarkeit mathematisch fassbar: Neben den in der Mathematik üblichen Ergebnissen, dass ein vermuteter Satz A entweder bewiesen oder widerlegt wird (dass also $\neg A$ bewiesen wird), gibt es in der mathematischen Logik noch eine dritte Möglichkeit: es kommt vor, dass man die *Unbeweisbarkeit* beider Sätze A und $\neg A$ mathematisch exakt *beweisen* kann.

1 Prädikatenlogik als universelle Sprache

Eine prädikatenlogische Sprache wird durch ein *Alphabet* festgelegt, das ist eine (meist endliche) Menge von Relations-, Funktions- und Konstantensymbolen, wobei jedem Funktions- und Relationssymbol eine endliche Zahl (in der Praxis oft 1 oder 2) als „Stelligkeit“ zugeordnet wird. Weiters lässt man eine (meist abzählbare) Menge von Variablen zu.

⁰Ich danke Jakob Kellner und Reinhard Winkler fuer ihre vielen Kommentare und Verbesserungsvorschläge.

⁰Dieser Artikel ist 2006 in den *Internationalen Mathematischen Nachrichten* erschienen.

Als *Terme* bezeichnet man nun erstens alle Konstantensymbole und alle Variablen, sowie alles, was man durch (wiederholte) Anwendung von Funktionssymbolen auf Variable und Konstantensymbole bekommt. („Anwendung“ ist hier ein rein syntaktischer Vorgang, der etwa von den formalen Ausdrücken x (Variable) und c (Konstantensymbol) zum formalen Ausdruck $f(x, c)$ führt, wenn f ein zweistelliges Funktionssymbol ist.)

Als Atomformeln bezeichnet man alle relationalen Ausdrücke der Form $R(t_1, \dots, t_n)$ (wobei R ein n -stelliges Relationssymbol und die t_i Terme sind), sowie Ausdrücke der Form $t_1 = t_2$. Formeln erhält man aus Atomformeln durch (wiederholte) Anwendung der Booleschen Junktoren $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \dots$ sowie durch (wiederholte) Anwendung der Quantoren \forall und \exists . (Siehe die untenstehenden Beispiele. Manchmal erweist es sich aus technischen Gründen als praktisch, offiziell nur eine kleinere Anzahl von Junktoren zuzulassen und alle anderen Junktoren als Abkürzungen anzusehen, also z.B. die Formel $A \leftrightarrow B$ nicht als eigenständige Formel sondern als Abkürzung für $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ anzusehen.)

Eine „geschlossene Formel“ (oder auch „Satz“) ist eine Formel, die keine freien Variablen enthält; das heißt, dass in so einer Formel alle Variablen durch Quantoren gebunden sind.

Eine *Struktur* \mathfrak{M} für eine vorgegebene Sprache bzw. für ein vorgegebenes Alphabet besteht aus einer nichtleeren Menge M sowie aus Interpretationen der Funktions-, Relations- und Konstantensymbole. Funktionssymbole müssen hier als Funktionen auf M geeigneter Stelligkeit interpretiert werden, etc. Die Interpretation eines Funktionssymbols f in der Struktur \mathfrak{M} wird oft mit $f^{\mathfrak{M}}$ bezeichnet. Vom Gleichheitssymbol „ $=$ “ verlangt man üblicherweise, dass es durch die tatsächliche Gleichheit (also durch die Menge $\{(m, m) : m \in M\}$) interpretiert wird.

Die Semantik (oder „Bedeutung“) einer geschlossenen Formel erklärt, in welchen Strukturen die betrachtete Formel gilt; sie wird in natürlicher Weise definiert (siehe die folgenden Beispiele; die Formel $\forall y \exists x f(x) = y$ gilt zum Beispiel in allen Strukturen $\mathfrak{M} = (M, f^{\mathfrak{M}})$, in denen das Funktionssymbol f durch eine surjektive Funktion $f^{\mathfrak{M}}$ von M nach M interpretiert wird).

Charakteristisch für die *erststufige* Prädikatenlogik ist, dass Quantoren sich immer nur auf *Elemente* von M beziehen, also nicht etwa auf Teilmengen, Funktionen, etc.

Beispiel: Sprache der Gruppentheorie

Die Sprache der Gruppentheorie verwendet ein zweistelliges Operationssymbol $*$ und (je nach Geschmack) auch ein weiteres einstelliges Funktionssymbol $^{-1}$ und ein Konstantensymbol 1 .

Beispiel für einen formulierbaren Satz der Gruppentheorie: „Wenn alle Elemente einer Gruppe Ordnung höchstens 3 haben, dann ist die Gruppe kommutativ“:

$$\forall x (x = 1 \vee x * x = 1 \vee (x * x) * x = 1) \rightarrow \forall x \forall y (x * y = y * x)$$

Dieser Satz gilt nicht in allen Gruppen; er beschreibt also eine Eigenschaft von gewissen Gruppen.

Man stößt aber bald auf Eigenschaften von Gruppen (oder deren Elementen), die nicht durch Sätze (bzw Formeln) der Prädikatenlogik erster Stufe ausdrückbar sind, wie zum Beispiel Endlichkeit oder Einfachheit.

Beispiel: Sprache der angeordneten Körper

Hier verwenden wir die Funktionssymbole $+$, $-$, $*$ sowie das Relationssymbol \leq , und je nach Geschmack auch $/$ (siehe die untenstehende Bemerkung über partielle Funktionen) und die Konstantensymbole 0 und 1 .

In dieser Sprache ist zum Beispiel das folgende Packungsproblem (das übrigens eine wahre Aussage ist) ausdrückbar:

„In eine Kiste mit den Maßen $3 \times 4 \times 5$ passen mindestens 2 Kugeln mit Radius 1“:

Er besagt nämlich, dass es zwei Punkte im \mathbb{R}^3 gibt (gegeben durch Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2), die gewisse Beziehungen erfüllen, wie etwa $0 + 1 \leq z_1$ und $z_1 + 1 \leq 5$, oder

$$(x_1 - x_2) * (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) * (y_1 - y_2) + (z_1 - z_2) * (z_1 - z_2) \geq 1 + 1 + 1 + 1.$$

Dies lässt sich durch eine erststufige Formel

$$\exists x_1 \exists y_1 \exists z_1 \exists x_2 \exists y_2 \exists z_2 (\dots \wedge z_1 + 1 \leq 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \wedge \dots)$$

ausdrücken.

Achtung: In dieser Sprache kann wieder nur über alle Körperelemente quantifiziert werden, nicht auch über die natürlichen Zahlen. Zum Beispiel ist die Eigenschaft eines angeordneten Körpers, archimedisch zu sein (das heißt, dass jedes Körperelement kleiner als eine der Zahlen $1, 1 + 1, \dots$ ist), nicht in dieser Sprache ausdrückbar.

Varianten: mehrsortige Strukturen, partielle Funktionen

Oft erweist es sich als praktisch, eine Variante der Prädikatenlogik zu verwenden, in der wir Variable mehrerer „Sorten“ unterscheiden; den Relations- und Funktionssymbolen sind dann nicht nur Stelligkeiten sondern für jede Stelle auch eine Sorte zugeordnet, und eine Struktur hat dann nicht nur eine Grundmenge M sondern eine Menge M_s für jede Sorte s (sowie wie vorhin Interpretationen der Funktions-, Relations- und Konstantensymbole).

Statt einer formalen Definition ist ein Beispiel illustrativer: In der Sprache der Vektorräume unterscheiden wir die beiden Sorten „Skalar“ (der die Variablen, λ, μ, \dots zugeordnet sind) und „Vektor“ (mit den Variablen x, y, \dots). Jeder Quantor bezieht sich immer nur auf eine Sorte, zB $\forall \lambda$ quantifiziert über alle Skalare der betrachteten Struktur.

Ebenso ist es möglich (etwa durch Auszeichnung eines speziellen Elements „**undef**“ der betrachteten Struktur), mit erststufigen Formeln Strukturen mit partiellen Operationen zu beschreiben. (Die partielle Operation der Division in einem Körper K könnte man zum Beispiel durch eine totale Operation auf der Menge $K \cup \{\mathbf{undef}\}$ ersetzen, indem man in allen Fällen, wo x/y undefiniert ist, den neuen Wert **undef** verwendet.)

Diese Änderungen der Sprache ist aber rein kosmetischer Natur; die unten genannten Resultate über Axiomatisierbarkeit und Entscheidbarkeit gelten für die mehrsortige genauso wie für die einsortige Logik.

Prädikatenlogik zweiter Stufe

Es wurde in den Beispielen erwähnt, dass ganz einfache Eigenschaften von Strukturen (zB Endlichkeit oder Einfachheit einer Gruppe) **nicht** durch Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe ausgedrückt werden können. Eine natürliche Erweiterung dieser Sprache ist die Prädikatenlogik zweiter Stufe. In dieser Sprache stehen neben den „Objektvariablen“ x, y, \dots auch „Relationsvariable“ X, Y, \dots zur Verfügung; jeder Relationsvariable ist wiederum eine Stelligkeit zugeordnet (die meist nicht explizit angeführt wird, sondern sich aus dem Kontext ergibt). Im Vergleich mit der Prädikatenlogik erster Stufe kommen folgende Konstrukte hinzu:

- Atomformeln sind nun auch Formeln der Form $X(t_1, \dots, t_n)$, wobei die t_i wiederum Terme sind, X eine n -stellige Relationsvariable. (Für einstellige Relationsvariablen X schreibt man statt $X(t)$ oft auch suggestiver $t \in X$.)
- Neben den Quantoren $\forall x, \exists x$ über Objektvariable sind auch Quantoren $\forall X, \exists X$ über Relationsvariable zugelassen.

Die Semantik ist wiederum „natürlich“; ein Quantor $\exists X$, wobei X eine k -stellige Relationsvariable ist, wird als „es gibt eine Teilmenge X von k -Tupeln“ interpretiert.

Beispiel

In der zweitstufigen Sprache der Gruppentheorie kann man etwa durch den Satz

$$\forall X : [(X \text{ ist Normalteiler}) \Rightarrow \forall y (y \in X) \vee \forall y (y \in X \Rightarrow y = 1)]$$

die einfachen Gruppen beschreiben (wobei die Formulierung von „ X ist Normalteiler“ hier dem Leser überlassen wird).

2 Folgerungsbegriff und der Vollständigkeitssatz

Ein Satz (das heißt, eine Formel ohne freie Variable) in einer vorgegebenen prädikatenlogischen Sprache heißt „wahr“ (oder besser „allgemeingültig“), wenn

er in jeder Struktur gilt, die diese Sprache interpretiert. So ist zum Beispiel der Satz

$$\text{Gruppenaxiome} \wedge \forall x (x * x = 1) \Rightarrow \forall x \forall y (x * y = y * x)$$

allgemeingültig. Die Notation $\models \varphi$ bedeutet, dass φ allgemeingültig ist, oder äquivalent: dass es keine Struktur \mathfrak{M} gibt, in der $\neg\varphi$ gilt. Die Aussage $\not\models \varphi$ bedeutet dann, dass es mindestens eine Struktur gibt, in der $\neg\varphi$ gilt.

Wenn φ freie Variable enthält, etwa die Variablen x, y, \dots , dann soll $\models \varphi$ dasselbe wie $\models \forall x \forall y \dots \varphi$ bedeuten.

Interessanter ist der Folgerungsbegriff, eine Art „bedingte“ Allgemeingültigkeit: Sei Σ eine Menge von Sätzen in einer festgehaltenen Sprache, sogenannte „nichtlogische Axiome“, und sei φ ein weiterer Satz. Dann bedeutet

$$\Sigma \models \varphi,$$

dass jede Struktur, in der alle Sätze in Σ gelten, auch den Satz φ erfüllt, oder anders ausgedrückt, dass es keine Struktur \mathfrak{M} gibt, in der alle Sätze aus $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ gelten.

Für $\Sigma = \emptyset$ ist dies gerade der vorhin genannte Begriff der Allgemeingültigkeit. Für endliche Mengen Σ ist $\Sigma \models \varphi$ äquivalent zur Allgemeingültigkeit der Formel $(\bigwedge \Sigma) \rightarrow \varphi$, zum Beispiel gilt

$$\{\psi_1, \psi_2\} \models \varphi \text{ genau dann, wenn } \models (\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \varphi$$

(sofern wenn ψ_1 und ψ_2 Formeln ohne freie Variable sind).

Betrachten wir nun eine Sprache, in der es nur endlich viele Relations-, Funktions- und Konstantensymbole gibt (mindestens aber ein Relations- oder Funktionssymbol welches mindestens zweistellig ist¹); dann kann die mathematische Logik folgenden fundamentale Aussagen machen:

- (1) Es gibt keinen Algorithmus, der von jeder vorgelegten Formel entscheiden kann, ob sie allgemeingültig ist oder nicht.

Das heißt: Die Funktion, die jedem Satz 1 zuordnet, wenn er allgemeingültig ist, und 0 sonst, ist nicht berechenbar.

- (2) Es gibt eine berechenbare Funktion B , die auf den natürlichen Zahlen definiert ist, und deren Wertebereich genau die Menge aller allgemeingültigen Sätze ist.

Äquivalent dazu: Es gibt einen Algorithmus, der, angewendet auf einen beliebigen Satz φ

- wenn φ allgemeingültig ist: nach endlicher Zeit terminiert und „ φ ist allgemeingültig“ ausgibt.
- wenn φ nicht allgemeingültig ist: nicht terminiert.

¹Der Fall einer Sprache mit nur einstellig Relationssymbolen und ohne Funktionssymbole wird bereits in der aristotelischen Logik behandelt; er ist sehr einfach.

Die Aussage (1) folgt aus Ergebnissen von Tarski, aber auch aus dem Gödelschen Unvollständigkeitssatz. Die Aussage (2) ist bereits eine Version des Gödelschen Vollständigkeitssatzes, der unten noch eingehender beschrieben wird.

In der Rekursionstheorie drückt man den durch (1) und (2) beschriebenen Sachverhalt so aus: Die Menge der allgemeingültigen Formeln ist zwar „rekursiv aufzählbar“, aber nicht „rekursiv“ (nicht „berechenbar“, nicht „entscheidbar“).

3 Der syntaktische Folgerungsbegriff

Man kann in der Menge aller Formeln (einer vorgegebenen Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe) in folgender Weise die Menge der „ableitbaren“ (oder „formal beweisbaren“) Formeln auszeichnen:

Zunächst bezeichnen wir alle Formeln der folgenden Form als **logische Axiome** (wobei A, B, C für beliebige Formeln stehen)

- (1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- (2) $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$
- (3) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
- (4) $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B)$
- (5) $A \rightarrow \forall x A$ (wenn x in A entweder gar nicht vorkommt oder bereits in A durch einen Quantor gebunden wird)
- (6) $(\forall x A(x)) \rightarrow A(t)$ (für beliebige² Terme t)

sowie alle Formeln, die aus diesen Axiomen durch Voranstellen von universellen Quantoren entstehen.

In diesem System betrachten wir Formeln $A \vee B$ als Abkürzung von $(\neg A \rightarrow B)$; ähnlich kann man \wedge und \exists als Abkürzungen auffassen.

Weiters sei **Modus Ponens** die folgende „Regel“ (das heißt hier: partielle Funktion auf den Formeln):

- $\text{MP}(A, (A \rightarrow B)) = B$ für alle Formeln A, B
- $\text{MP}(A, C)$ ist undefiniert, wenn C nicht die Form $A \rightarrow B$ hat.

Schließlich nennen wir eine Formel „ableitbar“, wenn sie durch (wiederholte) Anwendung von Modus Ponens auf Axiome entsteht; die Menge der ableitbaren Formeln ist also die kleinste Menge, die alle Axiome enthält und unter der partiellen Funktion MP abgeschlossen ist.

Für eine beliebige Menge Σ von Formeln sei die Menge der „aus Σ ableitbaren Formeln“ die kleinste Menge, die alle Axiome enthält, Σ umfasst, und unter der partiellen Funktion MP abgeschlossen ist.

²eine kleine technische Bedingung muss allerdings erfüllt sein: t darf keine Variablen enthalten, die in $A(t)$ durch Quantoren gebunden wären

Wir schreiben $\vdash \varphi$, wenn φ ableitbar ist, und $\Sigma \vdash \varphi$, wenn φ aus Σ ableitbar ist.

Aus der induktiven Definition der Menge der ableitbaren Formeln kann man leicht sehen, dass diese Menge rekursiv aufzählbar ist (also die unter (2) genannten Eigenschaften hat).

Man kann sich auch leicht von folgenden Eigenschaften überzeugen:

- Alle logischen Axiome sind allgemeingültig.
- Wenn A und $A \rightarrow B$ allgemeingültig sind, dann ist auch B allgemeingültig.

Daraus folgt natürlich, dass alle ableitbaren Formeln allgemeingültig sind:

Wenn $\vdash \varphi$, dann $\models \varphi$.

Allgemeiner gilt: Wenn $\Sigma \vdash \varphi$, dann $\Sigma \models \varphi$.

Der **Gödelsche Vollständigkeitssatz** ist die Umkehrung dieser Aussage:

Wenn $\Sigma \models \varphi$, dann $\Sigma \vdash \varphi$.

Links steht die Folgerung \models (also ein semantischer Begriff, für dessen Verständnis infinitäre Überlegungen notwendig sind; er ist der grundlegende Begriff der Modelltheorie), rechts das Ableitungssymbol \vdash (ein syntaktischer Begriff, bei dem es nur um endliche Manipulationen von endlichen Formeln geht; er wird in der Beweistheorie untersucht).

Anmerkung 1: es gibt viele Möglichkeiten, ableitbare Formeln durch verschiedene Systeme von logischen Axiomen und Regeln zu definieren. Gödel hat in seinem Beweis nicht das oben beschriebene System betrachtet, sondern ein geringfügig anderes. Er bezieht sich bereits im ersten Satz seiner Dissertation explizit auf die Systeme, die in den „Principia Mathematica“ von Russell und Whitehead und in den „Grundzügen der theoretischen Logik“ von Hilbert und Ackermann vorgestellt werden. Alle diese Systeme sind jedoch äquivalent in dem Sinn, dass der durch sie definierte Ableitungsbegriff $\vdash \varphi$ derselbe ist, und der Vollständigkeitssatz somit für alle diese Systeme gilt.

Anmerkung 2: Mit dem vorgestellten Axiomensystem gilt der oben zitierte Vollständigkeitssatz nur für „Logik ohne Gleichheit“, also nur für solche Formeln φ , die das Gleichheitssymbol nicht enthalten. Wenn man „Logik mit Gleichheit“ betrachtet, muss man die hier angestellten Betrachtungen geringfügig modifizieren, um zu einem Vollständigkeitssatz (also einer Äquivalenz von Allgemeingültigkeit und Ableitbarkeit) zu gelangen; zum Beispiel könnte man die Axiomenmenge um einige natürliche Gleichheitsaxiome, (wie zum Beispiel $x = y \rightarrow y = x$) erweitern.

4 Beweisskizze

Der Hauptteil von Gödels Dissertation ist dem Beweis der Implikation

Wenn $\models \varphi$, dann $\vdash \varphi$

(für gewisse Formeln φ in besonders einfacher Form) gewidmet; man darf annehmen, dass φ die Form $\neg\psi$ hat, und muss zeigen, dass

$\vdash \neg\psi$ oder $\not\vdash \neg\psi$

gilt: jede Formel ψ ist entweder *widerlegbar* (das heißt, die Negation von ψ ist beweisbar) oder *erfüllbar* (gilt also in einer geeigneten Struktur).

Der allgemeinere Vollständigkeitssatz besagt in dieser Umformulierung, dass jede Menge Σ von Formeln

- entweder *inkonsistent* ist — das soll heißen, dass bereits die Konjunktion über eine endliche Teilmenge von Σ widerlegbar ist:

Es gibt $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ in Σ , sodass $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$.

- oder erfüllbar ist – das heißt, es gibt eine Struktur \mathfrak{M} , in der jede Formel der Menge Σ gilt. (So eine Struktur heißt auch „**Modell** von Σ “.)

Die Aufgabe besteht also darin, zu einer beliebigen konsistenten Menge Σ ein Modell zu konstruieren.

Sowohl in Gödels ursprünglichem Beweis wie auch in dem später von Leon Henkin gefundenen Beweis sind die Elemente des gesuchten Modells neue Konstantensymbole, die durch eine Art „freier“ Konstruktion zur vorliegenden Sprache adjugiert werden. Außerdem erweitert man die vorgegebene konsistente Menge Σ zu einer Menge Σ' mit der Eigenschaft, dass es für jede Formel der Form $\exists x \varphi(x)$ in Σ' eine Konstante c gibt, sodass auch $\varphi(c)$ in Σ' ist. Entscheidend ist hier, dass dies möglich ist, ohne im Schritt von Σ zu Σ' die Konsistenz zu verlieren.

Diese Konstanten c werden später „bezeugen“, dass $\exists x \varphi(x)$ im konstruierten Modell auch gilt.

Schließlich kann man die Menge der Konstanten in der erweiterten Sprache durch geeignete Interpretation der Funktions- und Relationssymbole (Konstantensymbole werden durch sich selbst interpretiert) zu einem Modell der Menge Σ' machen, somit auch zu einem Modell der Menge Σ ; wenn in den betrachteten Formeln auch das Gleichheitssymbol vorkommt, muss man allerdings zunächst gewisse dieser Konstanten identifizieren.

Wenn man von einer Sprache mit endlich oder abzählbar unendlich vielen Symbolen ausgeht, erhält man sogar für jede konsistente Menge von nichtlogischen Axiomen ein Modell, das höchstens abzählbar ist. Der Henkinsche Beweis des Vollständigkeitssatzes erlaubt es, diesen auch für überabzählbare Sprachen zu beweisen; daraus kann man schließen, dass aus der Existenz eines unendlichen Modells die Existenz von Modellen jeder größeren Kardinalität folgt.

5 Anwendungen

Kompaktheit

Aus dem finitären Charakter der Definition von \vdash ergibt sich sofort die folgende Eigenschaft:

$\Sigma \vdash \varphi$ genau dann, wenn es eine endliche Menge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ mit $\Sigma_0 \vdash \varphi$ gibt,

also insbesondere: Eine Menge Σ ist genau dann konsistent, wenn jede endliche Teilmenge konsistent ist.

Die modelltheoretische Übersetzung liefert bereits einen nichttrivialen Satz: Eine Menge Σ hat genau dann ein Modell \mathfrak{M} , wenn jede ihrer endlichen Teilmengen ein Modell hat.

Dieser sogenannte *Kompaktheitssatz* spielt in der Modelltheorie eine fundamentale Rolle und ist weiters die Grundlage für das Gebiet der Nonstandard Analysis, einer Formulierung der Analysis, in der „infinitesimale“ Elemente als tatsächliche Objekte betrachtet werden und nicht nur als Umschreibung eines Grenzwertprozesses.

Man kann diesen „Kompaktheitssatz“ auch für negative Resultate verwenden; so kann man etwa zeigen, dass die Eigenschaft „Charakteristik ist 0“ von Körpern nicht durch einen Satz der erststufigen Prädikatenlogik ausgedrückt werden kann. Wäre nämlich φ_0 so ein Satz, dann hätte die Menge

$$\{\kappa, \neg\varphi_0, 1 + 1 \neq 0, 1 + 1 + 1 \neq 0, \dots\}$$

(wobei κ für die Körperaxiome steht) kein Modell, obwohl jede ihrer endlichen Teilmengen ein Modell (etwa $GF(p)$, für genügend großes p) hat.

Algebraisch abgeschlossene und reell abgeschlossene Körper

Betrachten wir die Theorie (Menge von Sätzen) T_0 in der oben erwähnten Sprache der Körper, die neben den Körperaxiomen und den Axiomen $1 + 1 \neq 0$, $1 + 1 + 1 \neq 0, \dots$ für jedes $n \geq 1$ die Formel

$$G_n : \quad \forall z_1 \cdots \forall z_n \exists x : x^n + z_1 * x^{n-1} + \cdots + z_n = 0$$

enthält; diese Theorie heißt „Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0“. Man zeigt in der Algebra, dass jedes Modell dieser Theorie durch seinen Transzendenzgrad über dem Primkörper \mathbb{Q} bestimmt ist, jedes *überabzählbare* Modell daher bereits durch seine Kardinalität. Aus der erwähnten Verschärfung des Vollständigkeitssatzes folgt nun, dass T_0 eine „vollständige Theorie“ sein muss, also für jede geschlossene Formel φ entweder $T_0 \vdash \varphi$ oder $T_0 \vdash \neg\varphi$ gelten muss (denn sonst wären sowohl $T_0 \cup \{\varphi\}$ also auch $T_0 \cup \{\neg\varphi\}$ konsistent, und hätten beide ein Modell einer fixen überabzählbaren Kardinalität).

Diese Überlegung liefert einen Algorithmus, der für jede Formel φ (der betrachteten Sprache) entscheiden kann, ob sie im Körper der komplexen Zahlen gilt oder nicht: man kann nämlich (im Prinzip) systematisch alle Formeln aufzählen, die aus den logischen Axiomen sowie aus T_0 mit Hilfe von Modus Ponens herleitbar sind; nach der obigen Bemerkung über die „Vollständigkeit“ der Theorie T_0 muss man bei diesem Prozess irgendwann auf φ oder auf $\neg\varphi$ stoßen; an diesem Punkt sieht man, ob φ oder $\neg\varphi$ in \mathbb{C} gilt.

Eine ähnliche Überlegung trifft auf die Theorien T_p der algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p zu, sowie auch auf die Theorie T_{rcf} der reell abgeschlossenen Körper. Die Theorie T_{rcf} ist eine Menge von abgeschlossenen Formeln in der Sprache der angeordneten Körper, die neben den Körperaxiomen und der Monotonie von Addition und Multiplikation verlangt, dass alle Polynome ungeraden Grades eine Nullstelle haben (T_{rcf} enthält also von den oben definierten Formeln G_n nur die Formeln G_1, G_3, G_5, \dots). Auch diese Theorie ist vollständig, und stimmt daher mit der Menge aller in $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ gültigen Formeln überein.

Insbesondere kann somit die Wahrheit von Formeln wie dem oben erwähnten konkreten Packungsproblem rein mechanisch herausgefunden werden. (Allerdings nur im Prinzip; man kann beweisen, dass der skizzierte Algorithmus auch für relativ kurze Formeln sehr lange Laufzeit haben kann.)

6 Andere Logiken

Die Formulierung $\models \varphi \Leftrightarrow \vdash \varphi$ suggeriert, dass der Vollständigkeitssatz ein einfacher und ganz natürlicher Satz ist. Dass die Wahrheit aber facettenreicher ist, sollen die folgenden Beispiele belegen:

Endliche Modelle

Definieren wir $\models_{\text{fin}} \varphi$, wenn φ in allen endlichen Strukturen (welche die gerade betrachtete Sprache interpretieren) gilt.

Dann kann man zeigen (wenn wiederum die Sprache mindestens ein 2-stelliges Relationssymbol enthält):

Die Menge $\{\varphi : \models_{\text{fin}} \varphi\}$ ist nicht rekursiv aufzählbar.

Daher gibt es auch keine Möglichkeit, einen äquivalenten Ableitungsbegriff \vdash_{fin} (mit einer entscheidbaren Menge von Axiomen und einer endlichen Menge von berechenbaren Funktionen) zu definieren. (Dies mag paradox anmuten, denn der Begriff \models_{fin} , der sich ja nur auf endliche Mengen bezieht, scheint von einfacherer Natur zu sein als der Begriff \models .)

Für den analogen Begriff \models_{infin} (der durch die Beziehung

$\models_{\text{infin}} \varphi \Leftrightarrow \varphi$ gilt in allen unendlichen Strukturen der betrachteten Sprache

definiert ist), folgt hingegen aus dem Vollständigkeitssatz sofort:

$\models_{\text{inf}} \varphi$ gilt genau dann, wenn φ mit Hilfe von Modus Ponens aus den logischen Axiomen zusammen mit der folgenden Menge Inf herleitbar ist:

$$\text{Inf} := \{\forall x \exists y (y \neq x), \forall x \forall y \exists z (z \neq x \wedge z \neq y), \dots\}$$

Logik zweiter Stufe

Viele wichtige und grundlegende Konzepte sind erst in der Logik zweiter Stufe ausdrückbar; insbesondere können die Mengen der natürlichen und der reellen Zahlen in dieser Logik durch eine Formel $\psi_{\mathbb{N}}$ bzw. $\psi_{\mathbb{R}}$ charakterisiert werden.

Nun kann man aber mit Hilfe des Gödelschen **Unvollständigkeitssatzes** zeigen, dass bereits die Menge $\text{Th}(\mathbb{N})$ der in \mathbb{N} gültigen erststufigen Formeln sicher nicht rekursiv aufzählbar ist (in Wirklichkeit liegt sogar eine ganze Hierarchie von Komplexitäten zwischen den rekursiv aufzählbaren Mengen und der Menge $\text{Th}(\mathbb{N})$). Da die Menge

$$\text{Th}(\mathbb{N}) = \{\varphi : \varphi \text{ ist Formel erster Stufe, } \psi_{\mathbb{N}} \models \varphi\}$$

also sehr kompliziert ist, muss auch die Relation \models in der zweitstufigen Logik sehr kompliziert sein. Einen Vollständigkeitssatz (im Sinne einer Äquivalenz zwischen der zweitstufigen Folgerungsrelation \models und einem Kalkülbegriff \vdash) kann es hier also nicht geben.

7 Die Rolle der Mengenlehre

Beweise in der Logik erster Stufe können wegen des Vollständigkeitssatzes (im Prinzip) immer auf ein allgemein anerkanntes³ besonders einfaches System zurückgeführt werden, sodass also (im Prinzip) kein Zweifel darüber möglich ist, was nun ein gültiger Beweis ist. Weiters ist durch den Vollständigkeitssatz garantiert, dass alle allgemeingültigen Aussagen, auch wenn sie unendliche Gesamtheiten betreffen, in endlicher Zeit mit finitären Mitteln unzweifelhaft beweisbar sind.

Die Logik zweiter Stufe (und erst recht eine Logik höherer Stufe) hat den Vorteil, dass sie viel ausdrucksstärker als die Logik erster Stufe ist, hat aber den Nachteil, dass es keinen anerkannten (und jedenfalls keinen rekursiven, das heißt entscheidbaren) Begriff des „Beweises“ gibt.

In einem naiven Zugang könnte man versuchen, zweitstufige Logik durch eine zweisortige (oder mehrsortige) erststufige Logik zu simulieren: die eine Sorte sind die Objekte des Interesses (etwa die natürlichen oder reellen Zahlen), die anderen Sorten werden als Teilmengen oder Relationen interpretiert, und ein spezielles Relationssymbol ε gibt die Zugehörigkeit an. In dieser Logik kann man allerdings nicht formulieren, dass man nur an jenen zweisortigen Strukturen (M_1, M_2, \dots)

³Hier ignoriere ich allerdings die kleine Gruppe der Intuitionisten und Anhänger von verwandten nichtklassischen Logiken, die das Axiom $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$, oder noch einfacher die Formel $\neg\neg A \rightarrow A$ nicht als allgemeingültig akzeptieren.

interessiert ist, in denen die zweite Sorte aus **allen** Teilmengen der ersten Sorte besteht.

Die Mengenlehre kann nun (allerdings nur rückblickend, und in völlig ahistorischer Auslegung) als ein Versuch gesehen werden, die gute Fassbarkeit der Logik erster Stufe mit der Ausdrucksstärke der Logiken höherer Stufe zu kombinieren. Formal betrachtet ist die Mengenlehre in einer Logik erster Stufe formuliert, in der es nur ein einziges Relationssymbol ε gibt; inhaltlich repräsentieren die Elemente der mengentheoretischen Universen (das heißt, der in der Mengenlehre betrachteten Strukturen) aber Mengen, also Objekte höherer Stufe: Wenn $\mathfrak{M} = (M, \varepsilon^{\mathfrak{M}})$ eine Struktur dieser Sprache ist (also: M ist eine nichtleere Menge, $\varepsilon^{\mathfrak{M}}$ eine zweistellige Relation auf M), so repräsentiert jedes $x \in M$ die Menge $\{y \in M : y \varepsilon^{\mathfrak{M}} x\}$.

Da es keine Bijektion zwischen der Potenzmenge von M und der Menge M gibt, können wir nicht erwarten, dass *alle* Teilmengen des Universums auch durch Elemente des Universums repräsentiert werden. Die Axiome der Mengenlehre verlangen nun, dass zumindest *gewisse* Teilmengen des Universums auch durch Elemente repräsentiert werden. (Zum Beispiel verlangt das Nullmengenaxiom

$$\exists y \forall x \neg(x \varepsilon y),$$

dass es ein Objekt $y \in M$ gibt, welches die leere Menge repräsentiert.)

Die mehr als hundertjährige praktische Erfahrung mit den mengentheoretischen Axiomen zeigt, dass sie ausreichen, um fast alle mathematischen Konstruktionen, die scheinbar die Ausdrucksstärke der zweitstufigen Logik benötigen, auf Grundlage der erststufig formulierten mengentheoretischen Sprache durchzuführen.

Neben der gerade beschriebenen Funktion der Mengenlehre als universelle Sprache der Mathematik hat sie aber noch eine andere (nicht minder wichtige) Rolle: Die im System ZFC (Zermelo-Fraenkel) zusammengefassten Axiome können fast alle in der Mathematik betrachteten Sätze entscheiden (also beweisen oder widerlegen) — dies ist allerdings nur eine Erfahrungstatsache und kein mathematischer Satz. Fast alle „working mathematicians“ betrachten die ZFC-Axiome insofern als Grundlage ihrer Arbeit, als sie alle ihre Sätze aus den ZFC-Axiomen herleiten; umgekehrt gelten (außer in der Mengenlehre selbst, wo auch andere Axiomensysteme untersucht werden) nur solche mathematischen Sätze als bewiesen, die aus den ZFC-Axiomen herleitbar sind. (Dies gilt natürlich nur im Prinzip; vielen Mathematikern ist die Rolle der ZFC-Axiome gar nicht bewusst.⁴)

4

J: Quoi ? Quand je dis: «Nicole, apportez-moi mes pantoufles, et me donnez mon bonnet de nuit», c'est de la prose ?

M: Oui, monsieur.

J: Par ma foi ! Il y a plus de quarante ans que je dis de la prose sans que j'en susse rien.

Möglichkeit und Wirklichkeit

Der Gödelsche **Unvollständigkeitssatz** zeigt (ähnlich wie das Russellsche Paradoxon, das ebenfalls durch *Diagonalisierung* bewiesen wird), dass allzu naive Erwartungen an die Mathematik nicht erfüllt werden können. Er gibt also eine obere Schranke für die erfüllbaren Hoffnungen der Mathematiker an: *You can't always get what you want . . .*

Der Vollständigkeitssatz hingegen (ähnlich wie das mengentheoretische Axiomensystem von Zermelo-Fraenkel) gibt eine untere Schranke für das garantiert Machbare an: *But if you try . . . you get what you need.*

Als philosophische Aussage kann der Vollständigkeitssatz „jede widerspruchsfreie Theorie hat ein Modell“ auch als eine Bestätigung des hilbertschen Ideals der Mathematik gesehen werden:

Alles, was denkmöglich ist, existiert auch.

Quellegeplätscher

Einen Beweis des Vollständigkeitssatzes (und zwar so gut wie immer in der Henkinschen Version, nie den ursprünglichen Gödelschen Beweis) findet man in den meisten Lehrbüchern der mathematischen Logik, etwa in den Büchern von *Ebbinghaus+Flum+Thomas* (1978/1994) *Goldstern+Judah* (1998), *Ender-ton* (2001) oder *Hinman* (2005).

Historische und philosophische Betrachtungen zum Vollständigkeitssatz findet man in den Kommentaren von *Dreben* und *van Heijenoort*, die im ersten Band von Gödels „Collected Works“ (herausgegeben von *Feferman*, 1986) einen Neuabdruck von Gödels Dissertation begleiten.

Lesenswert sind auch die Arbeiten von *Baaz+Zach* bzw *Buldt* über den Hintergrund und das historische Umfeld des Vollständigkeitssatzes bzw des Kompaktheitssatzes, die beide im zweiten Band von „Wahrheit und Beweisbarkeit“ (herausgegeben von *Buldt et al*, 2002) publiziert sind.

Die beiden englischen Sätze stammen von den Rolling Stones, das französische Zitat ist Molières Komödie „Der Bürger als Edelmann“ entnommen,