Martin Goldstern
August 2014

John Stillwell - Wahrheit, Beweis, Unendlichkeit.

(Originaltitel: Roads to Infinity, übersetzt von Roland Girgensohn)

Die 236 Seiten dieses Buches stellen Resultate der mathematischen Logik, insbesondere der Beweistheorie und der Mengenlehre, in erstaunlicher Breite und Tiefe dar.

Im ersten Kapitel erklärt Stillwell den Begriff der Abzählbarkeit und bringt gleich mehrere Beispiele von „Diagonalisierung“, wie etwa Euklids Beweis des Primzahlsatzes, Cantors Beweise der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen (1874 und 1891), sowie auch du Bois-Reymonds Beweis (1875), dass es zu jeder abzählbare Menge M von Folgen natürlicher Zahlen eine weitere Folge geben muss, die schneller als alle Folgen in M wächst.

Während der Inhalt dieses Kapitels den meisten Studierenden der Mathematik bereits im ersten Semester begegnet, habe ich den Eindruck, dass die Inhalte der weiteren Kapitel in den meisten Fällen nur jenen bekannt sind, die sich näher mit der mathematischen Logik beschäftigen.

Auf Cantors Spuren beschreibt das zweite Kapitel die Ordinalzahlen, definiert die erste überabzählbare Ordinalzahl ω_1, erklärt die Kontinuumshypothese, und wendet sich dann den Ordinalzahlen kleiner als $\varepsilon_0 = \sup\{0, \omega^0 = 1, \omega^1, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\}$ zu. Der Satz von Goodstein wird ausführlich beschrieben.

Das dritte Kapitel widmet sich der Unvollständigkeit; es erklärt nicht nur die Gödelschen Sätze und Turings Halteproblem, sondern auch die schon früher von Post entdeckte (aber noch nicht klar formulierte) Unvollständigkeit.

Kapitel 4 gibt einen Beweis von Gödels Vollständigkeitssatz, der auf einem schnittfreien Kalkül für die Prädikatenlogik beruht: Ausgehend von einem beliebigen Satz φ der Prädikatenlogik wird eine Prozedur beschrieben, die die Allgemeingültigkeit von φ zu widerlegen versucht; diese Prozedur scheitert entweder nach endlich vielen Schritten und liefert gleichzeitig einen Beweis für φ, oder sie konstruiert in unendlich vielen (wohldefinierten) Schritten ein Gegenbeispiel zu φ. In den historischen Bemerkungen wird auch eine Verbindung zum Problem „P=NP?“ gezeigt.

Kapitel 5 beschäftigt sich mit der Konsistenz der Arithmetik (genauer: mit dem System PA der Peano-Axiome in der erststufigen Prädikatenlogik). Es wird recht detailliert beschrieben, inwiefern die Konsistenzstärke von PA genau durch die Ordinalzahl ε_0 beschrieben wird.

Diese Überlegungen werden im 6.Kapitel vertieft. Die meisten „natürlichen“ unbeweisbaren Aussagen, die die Überschrift dieses Kapitels verspricht, sind Aussagen über stark wachsende Funktionen. So eine Funktion (die so schnell wächst, dass ihre Totalität nicht in PA bewiesen werden kann) ist schon im Satz von Goodstein (1944) enthalten; seit dem Satz von Paris-Harrington (1977) sind viele weitere solche Sätze gefunden worden, die oft den Charakter eines Ramsey-Satzes haben.

Im Kapitel 7 wird ein Ausblick auf höhere Unendlichkeiten gegeben, wie etwa unerreichbare oder messbare Kardinalzahlen, sowie auf das Determiniertheitsaxiom.

Jedes Kapitel endet mit recht ausführlichen historischen Bemerkungen, die aber selbst weiterführenden mathematischen Inhalt haben, der oft auch bis in die jüngste Zeit reicht; naturgemäß werden diese Inhalte etwas oberflächlicher dargestellt, also ohne Beweise, die den Rahmen des Buchs sprengen würden. Bereits das Kapitel über Ordinalzahlen enthält zum Beispiel eine Andeutung, wie Gödels „konstruktibles Universum L“ aussieht, und warum dort die Kontinuumshypothese gilt.

Definitionen, Sätze und Beweise werden nicht als solche markiert und nummeriert; dies gibt dem Leser (hier und im Folgenden ist mit diesem Wort der abstrakte Begriff des Lesers gemeint, der weder männlich noch weiblich ist) den Eindruck, eine informelle Unterhaltung mit dem Autor zu führen; tatsächlich aber liefert der Text Beweise für viele der im Text angeführten Sachverhalte, oder zumindest ausführliche Beweisskizzen, und der Leser ist aufgerufen, gelegentlich kurz gefasste Überlegungen selbst auszuführen.

Das Buch enthält einige Ungenauigkeiten oder sogar Fehler: zum Beispiel ist der Vergleich von Cantor-Normalformen falsch formuliert, wie man etwa am Beispiel $\omega^2 + \omega < \omega^2 * 2 + 1$ sehen kann; diese Ungenauigkeit kann der Leser aber leicht entdecken und korrigieren. Der Satz „alle determinierten Mengen sind Lebesgue-messbar“ ist hingegen schwieriger zu korrigieren — gemeint ist, dass für jede hinreichend abgeschlossene Klasse K von Mengen (abgeschlossen etwa unter stetigen Urbildern, Schnitten, etc) die Determiniertheit aller Mengen in K auch die Messbarkeit aller Mengen in K impliziert. Solche Formulierungen mögen den Leser verwirren; sie kommen aber erstens selten vor und sind zweitens, wenn auch pedantisch gesehen falsch, doch „moralisch richtig" und führen nicht in die Irre.

Das intendierte Publikum des Buches sind Mathematiker und Mathematikerinnen, die an Logik interessiert sind. Auch Spezialisten der mathematischen Logik können hier interessantes Material finden — dem Mengentheoretiker ist vielleicht die Beweistheorie des 4. und 5. Kapitels so fremd wie der Beweistheoretikerin die Mengenlehre des 7. Kapitels.

Das Buch beantwortet alle Fragen, die mir Studierende im Laufe und am Ende einer einführenden Logik-Vorlesung stellen, und enthält noch vieles, was weit darüber hinausgeht. Auch allen Kollegen und Kolleginnen aus der Mathematik, die gelegentlich über die Rolle der Logik in der Mathematik unsicher sind oder mehr über den mathematischen und auch historischen Hintergrund erfahren wollen, kann ich dieses Buch wärmstens empfehlen.

(Buchbesprechung für die *Internationalen Mathematischen Nachrichten*)