Peano-Axiome

Alle freien Variablen sind noch mit $\forall$ zu quantifizieren; der besseren Lesbarkeit halber sind hier die äußeren Allquantoren weggelassen worden. (Statt $x + 0 = x$ sollte es also $\forall x\,(x + 0 = x)$ heißen, etc.)
Oft verwendet man statt der Konstanten 1 eine unäres Funktionssymbol S für die Nachfolgerfunktion. 1 ist dann als Abkürzung für $S(0)$ zu lesen, und das Axiom A0 wird überflüssig.

Nachfolger:

N1 $\neg(x + 1 = 0)$.
N2 $x + 1 = y + 1 \to x = y$

Addition:

A0 $0 + 1 = 1$. A1 $x + 0 = x$.
A2 $x + (y + 1) = (x + y) + 1$.

Multiplikation:

M1 $x * 0 = 0$.
M2 $x * (y + 1) = (x * y) + x$.

Exponentiation:

E1 $x^0 = 1$.
E2 $x^{y+1} = x^y * x$.

Ordnung:

O1 $x \leq 0 \leftrightarrow x = 0$.
O2 $x \leq y + 1 \leftrightarrow (x \leq y \vee x = y + 1)$.

Induktion:

$$\mathrm{IND}_A: \qquad \Big[A(0) \wedge \forall x[A(x) \to A(x+1)]\Big] \to \Big[\forall z\, A(z)\Big]$$

Die Formel A darf hier noch beliebig viele freie Variable enthalten, die auch noch mit dem Allquantor quantifiziert werden müssen.

Beispiel für ein Induktionsaxiom, mit der Formel $x + y = y + x$:

$$\forall y \left(\Big[0 + y = y + 0 \wedge \forall x\,(x + y = y + x \to x' + y = y + x')\Big] \to \Big[\forall z\,(z + y = y + z)\Big]\right)$$

(wobei hier der besseren Lesbarkeit halber der Term $(x + 1)$ mit x' abgekürzt wurde).

Weiteres Beispiel für ein Induktionsaxiom, mit der Formel $\forall y\,(x + y = y + x)$:

$$\Big[\forall y\,(0{+}y = y{+}0) \wedge \forall x \Big((\forall y\ x{+}y = y{+}x) \to (\forall y\ x'{+}y = y{+}x')\Big)\Big] \to \Big[\forall z\, \forall y\,(z{+}y = y{+}z)\Big]$$

Die erste Formel beschreibt „Induktion nach x, für festes y“;
die zweite „Induktion nach x, simultan für alle y“.