Vorlesung “Mengenlehre 1”

Martin Goldstern

Sinn der Mengenlehre

1. Das Unendliche mit mathematischen Mitteln zu erforschen.
2. universelle Sprache der Mathematik
3. “hardware” der Mathematik.

Zu Punkt 1: Die wesentliche Erkenntnis der Mengenlehre ist die, dass es verschiedene “Größen” von unendlichen Mengen gibt. Sie haben vieleicht schon von “abzählbar” und “überabzählbar” gehört, das ist aber noch längst nicht alles, es gibt eine unendliche Skala von unendlichen “Kardinalitäten”, und diese Skala ist nicht nur unendlich lang, sondern natürlich überabzählbar — wie lang genau, das kann ich Ihnen nicht sagen, dafür müssen wir uns erst eine eigene Sprache schaffen. — Mehr dazu in ein paar Wochen, und auch im nächsten Semester, und wenn sich genügend Interessierte finden, auch in den folgenden Jahren.

Zu Punkt 2: Wir werden bereits in diesem Semester sehen, dass wir alle Objekte der Mathematik durch “reine” oder “hereditäre” Mengen interpretieren (oder “darstellen”) können.

Mit hereditär meine ich: auch die Elemente dieser Mengen sind wiederum Mengen, und die Elemente davon auch, etc. “Mengen bis ganz unten” (Das ist deshalb ok, weil es bei der leeren Mengen aufhört, bzw anfängt.)

Mit “darstellen” meine ich: Wir werden zB Mengen finden, die wir als “natürliche Zahlen” interpretieren können: sie sind alle verschieden, es gibt eine “erste”, zu jeder gibt es eine “nächste”, und es gilt das Prinzip der vollständigen Induktion für sie – wenn man davon ausgeht, dass die natürlichen Zahlen nur bis auf Isomorphie bestimmt sind, dann reicht uns das schon. Mehr dazu in dennächsten Wochen.

[Man könnte natürlich auch behaupten, dass die Sprache der Logik die universelle Sprache der Mathematik ist — das ist auch richtig, ich sehe Logik und Mengenlehre als zwei Seiten derselben Medaille]

Zu Punkt 3: Es gibt Fragen in der “naiven” Mathematik, die man mit den “üblichen” Mitteln nicht lösen kann, und die im Kern mengentheoretischer Natur sind. Ein paar prominente Beispiele:

- Kontinuumshypothese (gibt es eine überabzählbare Teilmenge der reellen Zahlen, die nicht bijektiv auf alle reellen Zahlen abgebildet werden kann?
- Maßtheorie: Gibt es ein (nichttriviales) σ-additives Maß, welches *alle* Teilmengen von $\mathbb{R}$ misst?
- Funktionalanalysis: gibt es einen unstetigen Homomorphismus zwischen Banachalgebren?
- Algebra: Whiteheadproblem (über freie abelsche Gruppen: ist jede Whiteheadgruppe frei?)
- Topologie: Normal Moore space problem
- ...

Mehr darüber in guten Büchern, und (auf Wunsch) in Spezialvorlesungen.

Was ist eine Menge?

Cantor: eine Mengen ist die Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung zu einem Ganzen. Das ist zwar keine formale Definition, aber das zeigt schon ein Charakteristikum: Eine Menge ist nicht eine “Vielheit”, sondern ein EINZIGES Objekt, eben ein “ganzes”.

Beginnen wir gleich mit der historisch wohl ersten “mengentheoretischen Überlegung”:

Der Satz von Cantor

Wir nennen eine unendliche Menge M “abzählbar” , wenn es eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M gibt. Jede unendliche Menge enthält eine abzählbare Teilmenge, ist also sozusagen “mindestens abzählbar”. Cantor hat nun gezeigt, dass die Umkehrung nicht gilt: nicht jede unendliche Menge ist abzählbar, es gibt also unendliche Mengen, die man mit einem Abzählprozess nicht “ausschöpfen” kann.

Wir zeigen: Sei $M = P(\mathbb{N})$, die Potenzmenge von $\mathbb{N}$. Dann ist M nicht abzählbar. Genauer: Sei $f : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$, dann gibt es ein $A \in P(\mathbb{N})$, also $A \subseteq \mathbb{N}$, A nicht im Wertebereich von f, also $A \notin f[\mathbb{N}]$, oder anders ausgedrückt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $A \neq f(n)$.

Beweis: Sei

$$A := \{n : n \notin f(n)\}.$$

Wäre nun $A = f(n_0)$, dann überlegen wir: Ist $n_0 \in A$?

$n_0 \in A \Leftrightarrow n_0 \notin f(n_0) \Leftrightarrow n_0 \notin A$. Das ist ein Widerspruch, also kann es so ein n_0 nicht geben.

Zur Illustration betrachen Sie die folgende Abbildung f, die zB der Zahl 0 die Menge aller natürlichen Zahlen zuordnet, dann der Zahl 1 die leere Menge, dann die ungeraden Zahlen, die Primzahlen, usw.

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
f(0) = \{ & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & \ldots & \} \\
f(1) = \{ & & & & & & & & & & \ldots & \} \\
f(2) = \{ & & 1, & & 3, & & 5, & & 7, & & \ldots & \} \\
f(3) = \{ & & & 2, & 3, & & 5, & & 7, & & \ldots & \} \\
f(4) = \{ & 0, & & 2, & & 4, & & 6, & & 8, & \ldots & \} \\
& & & \ldots & & & & & & & &
\end{array}$$

Die Menge A, die sicher nicht im Wertebereich von f liegt, bekommt man, nun, wenn man in obigem Diagramm entlang der Diagonale geht:

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
f(0) = \{ & \mathbf{0}, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & \ldots & \} \\
f(1) = \{ & & _ & & & & & & & & \ldots & \} \\
f(2) = \{ & & 1, & _ & 3, & & 5, & & 7, & & \ldots & \} \\
f(3) = \{ & & & 2, & \mathbf{3}, & & 5, & & 7, & & \ldots & \} \\
f(4) = \{ & 0, & & 2, & & \mathbf{4}, & & 6, & & 8, & \ldots & \} \\
& & & \ldots & & & & & & & &
\end{array}$$

und das Komplement bildet, aus $\{0, \quad 3, 4, \ldots\}$ entsteht $A = \{\ \ 1, 2, \qquad , \ldots\}$, und sicherlich ist $A \neq f(0)$ (weil ja $0 \in f(0)$, aber $0 \notin A$. Ebenso erhält man $A \neq f(1)$, etc.

Dieser Beweis ist also ganz analog zum Ihnen bekannten Beweis, dass die reellen Zahlen überabzählbar sind.

Kurzer Exkurs: Genaugenommen hat das Cantor nicht so geschrieben, er hatte eine Arbeit über die reellen Zahlen geschrieben, in dieser Arbeit hat er bewiesen, dass es nur abzählbar viele algebraische Zahlen gibt, aber überabzählbar viele reelle Zahlen. Interessanterweise hat er diese Arbeit “Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller algebraischen Zahlen” genannt, das Abzählbarkeitsresultat schien ihm also anscheinend wichtiger als das Überabzählbarkeitsresultat. Mir scheint es aber so, dass die Idee der Überabzählbaren, also die Idee, dass man zwischen verschiedenen “Größen” unendlicher Mengen unterscheiden kann, einer der wichtigsten Beiträge Cantors zur Mathematik war. Natürlich gibt es auch ganz andere Methoden, mit denen man unendliche Mengen ihrer “Größe” nach unterscheiden kann, z.B. das Lebesguemaß oder die Hausdorffdimension, das sind aber immer Größenbegriffe, die nicht die Menge selbst sondern eine Struktur (zB eine geometrische Struktur) auf der Menge messen, die Begriffe “abzählbar”, “überabzählbar”, und allgemeiner “Kardinalität” beschäftigen sich mit nackten Mengen.

Ende des Exkurses, wir kehren zurück zur Mengenlehre.

Den obigen Beweis können wir verallgemeinern zu folgendem Satz: Sei X beliebige Menge, dann gibt es keine surjektive Funktion von X auf $P(X)$, d.h: Wann immer $f : X \to P(X)$, dann gibt es ein $A \subseteq X$, sodass es kein $x_0 \in X$ gibt mit $f(x_0) = A$.

Beweis: $A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$. ...

Die Russellsche "Antinomie"

Jetzt wird es aber schon recht eng. Sei nämlich M die Menge ALLER Mengen. Jedes Element von $\mathscr{P}(M)$ ist eine Teilmenge von M, also jedenfalls eine Menge, also ein Element von M. Damit haben wir eine surjektive Funktion von M nach $\mathscr{P}(M)$ gefunden: $x \mapsto x$ (und denjenigen Elementen von M, die keine Teilmengen von M sind, ordnen wir die leere Menge zu, also jedenfalls ein Element von $\mathscr{P}(M)$.)

Das scheint ein Widerspruch zu sein. Gehen wir zum vorigen Beweis zurück, da hatten wir eine Menge A konstruiert, die explizit nicht im Wertebereich von f sein kann:

$$A = \{x \in M : x \notin f(x)\} = \{x : x \notin x\} \cup \{x : x \not\subseteq M\}$$

Schauen wir uns das genauer an, und bezeichnen wir die erste dieser Mengen mit R:

$$R = \{x \in M : x \notin x\}$$

Dies ist die "Russelsche Paradoxie", die Menge aller Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten, führt auf einen Widerspruch: Enthält sich diese Menge R selbst, oder nicht?

x ist genau dann in R, wenn x die Bedingung $x \notin x$ erfüllt.

Dies gilt für jedes x, also insbesondere auch für $x = R$:

R ist genau dann in R, wenn R die Bedingung $R \notin R$ erfüllt.

Das scheint zunächst sehr unangenehm, denn wenn diese Beweismethode der Diagonalisierung, die einen schönen Satz beweist, auch einen WIderspruch beweist, dann geht uns vielleicht dieser schöne Satz verloren. Vielleicht ist sogar das Begriffspaar Abzählbarkeit/Überabzählbarkeit in sich widerspruchsvoll?

Um dieses scheinbare Paradoxon aufzuklären, betrachten wir zwei ganz andere Beispiele:

> Erstens, sei n_0 die kleinste natürliche Zahl. Dann ist $n_0 - 1$ aber noch kleiner, Widerspruch!
>
> Der Widerspruch klärt sich auf: $n_0 - 1$ ist keine natürliche Zahl mehr! Vielleicht ist die "Menge" R auch keine Menge mehr?!
>
> Zweitens: Sei x_0 die kleinste positive reelle Zahl. Dann ist aber $x_0/2$ noch immer eine positive reelle Zahl,und kleiner – WIderspruch.
>
> Aufklärung: Ein x_0 wie gewünscht "gibt es nicht". Vielleicht ist das mit R so ähnlich?

Wir umschreiben einmal die Definition von R:

R ist ja als Menge $\{x : x \notin x\}$ definiert, d.h: R sei eine Menge, die folgende Eigenschaft hat: für alle x gilt: x ist genau dann in R, wenn x keine Element von x ist.

Wie wir aber vorhin gesehen haben, gibt es so ein R einfach nicht! Das hat noch gar nichts mit Mengenlehre zu tun, das ist ein rein logischer Widerspruch. Wenn wir **irgendeine** zweistellige Relation ε betrachten, dann gilt genauso: Es gibt kein Objekt R mit der Eigenschaft: für alle x, $x \mathrel{\varepsilon} R \Leftrightarrow x \not\mathrel{\varepsilon} x$.

Das Komprehensionsprinzip

Wie sind wir denn überhaupt auf die Idee gekommen, dass es so eine Menge R geben soll? Die Idee, die hinter der Mengenbildung steckt, ist folgende:

(K1) Wann immer wir eine Eigenschaft $E(x)$ haben ("x ist natürliche Zahl", "x ist differenzierbare Funktion", "x ist einer Fermatsches Tripel" [leere Menge!]),
dann können wir die "Menge aller x, die E erfüllen" bilden.

Anders ausgedrückt:

(K2) Für jede Eigenschaft $E(\cdot)$ gibt es eine Menge M_E, die folgendes erfüllt:

$$\forall x : x \in M_E \Leftrightarrow E(x)$$

Das nennen wir das *Komprehensionsprinzip.* [comprehendo 3, -di, -pr(eh)ensus: zusammenfassen; fassen, erfassen, begreifen]

Hier steckt wieder die Intuition dahinter, dass wir alle Objekte mit einer gemeinsamen Eigenschaft (die natürlichen Zahlen, die differenzierbaren Funktionen, etc.) als EIN GANZES begreifen können. Wenn sie von dem philosophischen Streit um aktual-Unendlich vs Potentiell-unendlich gehört haben, dann sehen Sie: die Mengenlehre steht klar auf der Seite des aktual-Unendlichen.

Dieses Komprehensionsprinzip ist also genau das, was wir wollen. Aber: You can't always get what you want!

Es wäre auch schön, wenn man immer Summe mit Integral vertauschen könnte, oder wenn Matrizenmultiplikation kommutativ wäre, aber es ist eben nicht so. Wir haben gesehen, dass diese sehr allgemeine Komprehensionsprinzip auf einen Widerspruch führt, wenn wir für die Eigenschaft "$E(x)$" "$x \notin x$" einsetzen. Zumindest diese Eigenschaft müssen wir also aus unserem Komprehensionsprinzip ausklammern.

Auf welche anderen Eigenschaften dürfen wir Komprehension nicht anwenden? Da gibt es verschiedene Möglichkeiten, die zu verschiedenen Mengentheorien führen. Entweder man meint, das Übel liege darin, dass dieselbe Variable sozusagen gleichzeitig auf zwei verschiedenen Stufen vorkommt, als Element: $x\in$, und als Menge: $\in x$. Wenn man diesen Ansatz weiterverfolgt, kommt man zur Russellschen *Typentheorie*, oder zu Quines *New Foundations*, das sind beides "alternative" Mengentheorien, die uns aber jedenfalls in diesem Semester nicht weiterhin beschäftigen werden.

Wir werden so vorgehen: Wir schreiben uns eine explizite Liste aller jenen Fälle des Komprehensionsprinzips auf, die wir zulassen wollen. Diese Liste nennen wir die Axiome.

Ich werde dann versuchen, sie zu überzeugen (oder zu überreden),

1 dass wir uns mit dieser harmlosen Liste keinen Widerspruch einhandeln.

2 dass die in dieser Liste postulierten Mengen für die gesamte Mathematik als Grundlage ausreichen.
But if you try sometimes you'll find: You'll get what you need...

Sie kennen vielleicht den Witz, in dem das alte sowjetische System, das amerikanische System und das österreichische verglichen werden: In der alten Sowjetunion war alles verboten, was nicht explizit erlaubt war – in den USA alles erlaubt, was nicht explizit verboten war, und in Österreich war alles erlaubt, was explizit verboten war.

Wir werden im Aufbau unserer Mengenlehre einem "totalitären" Kurs folgen: wir dürfen eine Menge M nur dann bilden, wenn wir aus den Axiomen schließen können, dass es so einen Menge M mit den gewünschten Eigenschaften auch wirklich gibt.

(So wie zB beim Rechnen in einem Körper: Sie dürfen $\sqrt{x}$ auch nur dann hinschreiben, wenn sie bereits wissen, das x eine Quadratwurzel hat, und Sie dürfen so etwas wie $z = x/y$ nur dann verwenden, wenn Sie wissen, dass $y \neq 0$ ist. In der Schule lernt man soclhe Dinge wie "durch 0 darf man nicht dividieren" — ich würde das aber nicht als Verbot sehen, sondern als Abkürzung für den Sachverhalt: "Es gibt kein [eindeutig bestimmtes] z mit $z \cdot 0 = x$, daher ist der Ausdruck $x/0$ sinnlos".)

Das ist im Moment alles, was ich zur Frage der "Paradoxien" sagen möchte. Später kommt noch mehr.

Reine Mengen

Ein weiteres Prinzip, dem wir in dieser Vorlesung folgen werden: Alle Objekte sind Mengen. Insbesondere auch alle Elemente aller Mengen, die wir betrachten werden. ALLE OBJEKTE SIND MENGEN! Es gibt also keine "Atome" oder "Urelemente", oder wenn es sie "gibt", dann werden wir sie jedenfalls [zunächst] aus unseren Überlegungen ausklammern.

Warum diese Einschränkung? Das hat nur technische Gründe, man kann Mengenlehre auch über Atomen betreiben, und manchmal ist das auch nötig oder zumindest praktischer, aber wir werden das, zumindest in diesem Semester, nicht brauchen. Wie schon vorhin erwähnt, werden wir alle mathematischen Objekte durch Mengen darstellen oder "emulieren". (Man kann aber ebenso ein Mengenlehre über einer vorgegebenen Menge von "Atomen" oder "Urelementen" aufbauen, das ist Geschmackssache; unser Vorgehen, die Mengenlehre ohne Atome, ist technische eine Spur einfacher.)

Leitlinien

1. Alle Objekte [die wir in dieser Vorlesung betrachten werden] sind Mengen.
2. Andere mathematische Objekte werden durch Mengen "emuliert".

   Das Komprehensionsprinzip:

   Fuer jede Eigenschaft $E(\cdot)$ gibt es eine Menge M_E, die folgendes erfuellt:

   $$\forall x : x \in M_E \Leftrightarrow E(x)$$

   ist leider im Allgemeinen falsch (Beispiel: $E(x) =$ "$x \notin x$"), aber wir werden es trotzdem "vorsichtig" anwenden, um die Bildung von Mengen zu rechtfertigen.
3. "vorsichtig" heißt: nur in gewissen Fällen, die wir durch "Axiome" beschreiben. D.h., die [meisten] Axiome sind eigentlich "Postulate", die die Existenz gewisser Mengen fordern.
4. Wir versuchen, alle Eigenschaften durch *Formeln* zu beschreiben.

Axiome, Teil 1

Wir beginnen also mit den Axiomen. (Die folgende Liste wurde von Zermelo aufgestellt, ca. 1904, später hat Skolem noch eine Ungenauigkeit beseitigt, und das letzte Axiom, das "Ersetzungsaxiom", wurde erst später von Fraenkel hinzugefügt. Das Ersetzungsaxiom werden wir voraussichtlich in diesem Semester nicht brauchen.)

Das erste Axiom sagt, dass Mengen durch ihren "Inhalt" eindeutig bestimmt sind.

Extensionalitätsaxiom:

$$\forall A \, \forall B \left([\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B] \;\Rightarrow\; A = B \right)$$

oder anders ausgedrückt:

$$\forall A \, \forall B \left(A \neq B \Rightarrow \exists x : (x \in A \& x \notin B \;\vee\; x \notin A \& x \in B \right)$$

Das scheint vielleicht manchen selbstverständlich, aber betrachten sie zB folgende zwei Mengen:

1. $\{n > 2 : x^n + y^n = z^n$ hat nichttriviale Lösung $\}$.
2. $\{f : f$ ist differenzierbare aber nicht stetige Funktion von $[0,1]$ nach $[0,1]\}$.

Im ersten Fall steht eine Menge natürlicher Zahlen da, im zweiten Fall eine Menge von Funktionen. Können zwei solche Mengen einander gleich sein? Man könnte sagen, dass die beiden Mengen "intensional" (intendere = anspannen;sich wenden, streben nach; beabsichtigen) verschieden sind, aber "extensional" (extendere: ausspannen; sich ausbreiten, also Extension=die Spanne, hier: Inhalt) nach gleich, nämlich leer.

Mit diesem Axiom legen wir uns fest, dass für uns nur die "Extension" Bedeutung hat.

Wir werden im Folgenden ein paar Instanzen des Komprehensionsprinzips als Axiome angeben. Jedenfalls wissen wir aber schon, wegen des Extensionalitätsaxioms: Zu jeder Eigenschaft $E(\cdot)$ gibt es *höchstens* eine Menge M_E mit:

$$\forall x : x \in M_E \Leftrightarrow E(x)$$

(Wären nämlich M und M' zwei solche Mengen, dann hätten sie die gleichen Elemente, wären also gleich.)

Wir bezeichen diese Menge E mit

$$\{x : E(x)\}$$

Ich betone aber noch einmal, dass wir uns eigentlich immer, wenn wir so eine Menge bilden, rechtfertigen müssen, dass die Bildung dieser Menge "erlaubt" ist. (Gelegentlich werde ich so eine Rechtfertigung aber Ihnen als Übungsaufgabe überlassen.)

Nullmengenaxiom: $\exists N : \ \forall x\, x \notin N$, oder mit anderen Worten:

$$\exists N : (\forall x : x \in N \Leftrightarrow x \neq x)$$

Zusammen mit dem Extensionalitätsaxiom sehen wir sofort, dass es genau eine Nullmengen gibt, wir nennen sie $\emptyset$ oder $\{\ \}$.

Sprache der Mengenlehre

Unsere offizielle "Sprache der Mengenlehre" verwendet "Objektvariable" x, y, A, B, $\ldots$, logische Junktoren $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$, logische Quantoren $\forall$, $\exists$; weiters verwenden wir das zweistellige Relationssymbol ε als einziges nicht "rein logisches" Symbol, sowie das Gleichheitszeichen $=$. Aus diesen Symbolen (plus Klammern) bauen wir in natürlicher Weise Formeln auf.

$\exists! x$ bedeutet "es gibt genau ein x". Formal definieren wir

$$\exists! x\, (\varphi(x)) \quad := \quad (\exists x\, \varphi(x)) \wedge \forall x, x' : (\varphi(x) \wedge \varphi(x') \to x = x')$$

ACHTUNG! Das bedeutet, dass die Zeichen $\cup$, $\subseteq$, $\emptyset$ und insbesondere die Klammern $\{\cdots\}$ offiziell nicht in unserer Sprache vorkommen. (Das ist auch gut so, weil wir ja schon gesehen haben, dass die naiv verwendete Konstruktion $M := \{x : \cdots\}$ leicht zu Widersprüchen führt.)

Wir erlauben aber, Zeichen aus unserer inoffiziellen Sprache als *Abkürzungen* zu verwenden:

- $A \subseteq B$ ist Abkürzung für $\forall x : (x \in A \to x \in B)$
- $A = \emptyset$ ist Abkürzung für $\forall x : \neg(x \in A)$. (Diese Schreibweise ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn wir wissen, dass es höchstgens eine Nullmenge gibt, denn wir wollen aus $A = \emptyset$ und $B = \emptyset$ natürlich auf $A = B$ schließen können.)
- $\cdots \emptyset \cdots$ ist Abkürzung für

  $$\exists A : (A = \emptyset \wedge (\cdots A \cdots).$$

  Unter der Hypothese, dass das es genau eine Nullmenge gibt, ist diese Aussage äquivalent zu:

  $$\forall A : (A = \emptyset \to (\cdots A \cdots).$$

Axiome der Mengenlehre, Fortsetzung

Singletonaxiom:

$$\forall a\, \exists A : \forall x \big(x \in A \Leftrightarrow x = a\big)$$

also es wird die Existenz einer Menge $\{x : x = a\}$, auch kurz $\{a\}$ genannt, postuliert.

Nochmals: Sprache der Mengenlehre

Wir führen die Abkürzung $A = \{x\}$ als Abkürzung für
$$\forall z\,(z \in A \leftrightarrow z = x)$$
ein. (Dies ist sinnvoll, wenn wir wissen, dass es zu jeder Menge x genau eine Menge A mit dieser Eigenschaft gibt.)

Weiters erklären wir, dass $(\cdots\{x\}\cdots)$ Abkürzung für $\exists A : (A = \{x\} \wedge (\cdots A \cdots))$ ist, wenn x in dieser Formel frei ist. Die Formel $\forall x\,(\cdots\{x\}\cdots)$ erklären wir als Abkürzung für $\forall x\,(\exists A : (A = \{x\} \wedge (\cdots A \cdots)))$.

(Hier müsste man eigentlich einige technische Lemmata beweisen, um sicherzustellen, dass diese Definitionen wirklich das tun, was wir von ihnen erwarten.)

Axiome der Mengenlehre, Fortsetzung

Kleines Vereinigungsaxiom.
$$\forall A\,\forall B\ \exists C : \forall x(x \in C \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B)$$
es wird also die Existenz einer Menge $\{x : x \in A \vee x \in B\}$ postuliert,die wird kurz $A \cup B$ genannt.

(Wir werden später sehen, dass diese drei Axiome eigentlich überflüssig sind, weil sie aus anderen Axiomen folgen, die wir später behandeln werden.)

– $A = \{x, y\}$ ist Abkürzung für $(x \in A) \wedge (y \in A) \wedge (\forall z : z \in A \rightarrow z = x \vee z = y)$, oder, je nach Geschmack, die dazu logisch äquivalente Formel
$$\forall z(z \in A \leftrightarrow z = x \vee z = y)$$

Emulation der natürlichen Zahlen

Als erstes repräsentieren wir die natürlichen Zahlen durch Mengen: $0 = \{\}$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$ und so weiter.

Was heißt "und so weiter"? Weil wir uns mit Grundlagen beschäftigen, müssen wir Beweise auch bis hinunter zu den Grundlagen führen, wir erlauben uns also sowohl in Definitionen als auch bei den Beweisen kein "...".

Sei $S(x) = x \cup \{x\}$ (für beliebige Mengen x wohldefiniert. $S(x) =$ der "Nachfolger" von x. (Nach unserem bisherigen Wissen ist noch gar nicht garantiert, dass $S(x)$ immer $\neq x$ ist!)

Definition: Eine Menge A heißt **induktiv**, wenn
$$0 \in A\ \wedge\ \forall x : (x \in A \Rightarrow S(x) \in A)$$

Satz: Es gibt eine kleinste induktive Menge, also eine Menge A, die induktiv ist und Teilmenge jeder induktiven Menge ist. (Für diesen Satz brauchen wir ein paar Mengenbildungsaxiome, die wir erst in den nächsten Stunden kennenlernen werden.)

Anders ausgedrückt: Es gibt [genau eine] Menge A mit der Eigenschaft:
$$\forall x : \big(x \in A\ \Leftrightarrow\ \forall B : \text{wenn } B \text{ induktiv, dann } x \in B\big)$$
und zudem gilt: A ist induktiv.

Dies ist wieder ein Fall des Komprehensionsaxioms.

Wir nennen diese kleinste induktive Menge ω:
$$\omega = \{x : \forall B\ [\text{wenn } B \text{ induktiv, dann } x \in B]\}$$

Die Eigenschaft "$\forall B \subseteq \omega$: Wenn B induktiv, dann ist $B = \omega$" (= der Satz über vollständige Induktion) folgt leicht aus der Definition von ω.

Auf einer eigenen Seite finden Sie einige Fakten über die natürlichen Zahlen, die formal mit Induktion bewiesen werden. Die meisten dieser Sätze sind intuitiv einleuchtend, wenn man sich

$$n = \{0, \ldots, n-1\}$$

for Augen hält. Der Sinn der angeführten Beweise liegt in erster Linie nicht darin, die Wahrheit dieser Behauptungen zu belegen, sondern sie sollen vor allem demonstrieren, dass formale Beweise **möglich** sind.

Das geordnete Paar

Wir wollen mit Funktionen und Relationen arbeiten. Dafür brauchen wir den Begriff des "geordneten Paars $\langle x, y\rangle$". Wir wollen $\langle x, y\rangle$ (für alle Mengen x, y) definieren, wobei folgende Eigenschaft erfüllt sein muss:

$$(*) \qquad \forall x\, \forall y\, \forall x'\, \forall y' : \langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle \;\Rightarrow\; x = x' \wedge y = y'$$

Wir wählen die Paardefinition von Kuratowski:

$$\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

und zeigen, dass tatsächlich die Forderung $(*)$ erfüllt ist. [Beweis wird hier nicht ausgeführt.]

Statt $\langle x, y\rangle$ schreiben wir auch manchmal (x, y).

Definition: $A \times B := \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$ oder ausführlicher $A \times B := \{z : \exists x \in A\, y \in B\, z = (x, y)\}$, d.h:

$$\forall z : z \in A \times B \;\Leftrightarrow\; \exists x \in A\; \exists y \in B : z = (x, y)$$

(die Forderung, dass diese Menge existiert, ist also wieder eine Instanz des Komprehensionprinzips.)

Relationen und Funktionen

Definition: R ist Relation, wenn jedes Element von R ein geordnetes Paar ist. R ist Relation von A nach B, wenn $R \subseteq A \times B$.

Definition: $\mathrm{dom}(R) = \{x : \exists y\, (x, y) \in R\}$, der "Definitionsbereich" von R. Das ist meistens nur sinnvoll, wenn R eine Relation ist (aber im Prinzip für jede Menge R definiert).

Definition: $\mathrm{ran}(R) = \{y : \exists x\, (x, y) \in R\}$, der "Wertebereich" von R.

Definition: f ist eine Funktion von A nach B (wir schreiben auch $f : A \to B$), wenn $f \subseteq A \times B$, $\mathrm{dom}(f) = A$, und

$$\forall x \in A\, \forall y \in B\, \forall y' \in B : (x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \;\Rightarrow y = y'$$

Wenn $f : A \to B$, dann definieren wir

$$f(x) = \{t : \exists y \in B\, [(x, y) \in f \wedge t \in y]\}$$

oder

$$f(x) = \{t : \forall y \in B\, [(x, y) \in f \Rightarrow t \in y]\}$$

Diese beiden Definitionen sind äquivalent, weil es ja genau ein y mit $(x, y) \in f$ gibt.

Es ist leicht sehen (und nicht so schwer zu beweisen), dass für Funktionen $f, g : A \to B$ gilt:

$$f = g \;\Leftrightarrow \forall a \in A : f(a) = g(a)$$

Vereinigungsmengenaxiom

Alle Objekte, die wir betrachten, sind Mengen. Wenn wir betonen wollen, dass wir ein Objekt A als Menge betrachten (also auch an Elementen $a \in A$ interessiert sind), verwenden wir Großbuchstaben.

Wenn wir betonen wollen, dass wir auch die Elemente eines Objekts $\mathscr{A}$ in ihrer Eigenschaft als Menge betrachten wollen, dann verwenden wir für diese Elemente Großbuchstaben (z.B. A), und für die "Menge der Mengen" einen anderen Schrifttyp, z.B. $\mathscr{A}$.

Das Vereinigungsmengenaxiom sagt:

$$\forall \mathscr{A}\, \exists B : \forall z [z \in B \Leftrightarrow \exists A \in \mathscr{A}\ z \in A]$$

D.h., B enthält sozusagen genau die "Elemente zweiter Stufe" von $\mathscr{A}$. Da es genau eine Mengen B wie oben beschrieben gibt, ist es sinnvoll, für sie einen neuen Namen einzuführen:

$$\bigcup \mathscr{A} := \{z : \exists A \in \mathscr{A}\ z \in A\}$$

Beispiel 1: Sei $\mathscr{A} = \{\{0,3\},\{1,3\},\{\}\}\}$, dann ist $\bigcup \mathscr{A} = \{0,3,\ \ 1,3\ \ \ \} = \{0,1,3\}$. [Die Operation $\bigcup$ "nimmt Mengenklammern weg"].

Beispiel 2: Sei $\mathscr{A} = 5 = \{0,1,2,3,4\} = \{\,\{\},\{0\},\{0,1\},\{0,1,2\},\{0,1,2,3\}\,\}$. Dann ist

$$\bigcup \mathscr{A} = \{\ 0,\ \ 0,1,\ \ 0,1,2,\ \ 0,1,2,3\} = \{0,1,2,3\} = 4$$

Allgemein ist für $n \in \omega$: $\bigcup S(n) = n$. [Beweis?]

Potenzmengenaxiom

Zu jeder Menge A gibt es ihre "Potenzmenge", also eine Menge P, die [genau] alle Teilmengen von A enthält:

$$\forall A\, \exists P : \forall z [z \in P \Leftrightarrow z \subseteq A]$$

Wir schreiben

$$\mathscr{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

Produktmenge etc

Wir können nun die Bildung von Produktmenge und anderen Mengen "rechtfertigen": Seien A und B Mengen. Wenn $a \in A$, $b \in B$, dann sind $\{a\}$ und $\{a,b\}$ Teilmengen von $A \cup B = \bigcup\{A,B\}$.
Also $\{a\},\{a,b\} \in \mathscr{P}(A \cup B)$, daher $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\} \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$, daher

$$(a,b) \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B)).$$

Also ist $A \times B = \{z \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B)) : \exists a \in A\, \exists b \in B : z = (a,b)\}$, daher ist die Existenz der Produktmengen aus einer Instanz des Aussonderungsaxioms (zusammen mit Potenzmengenaxiom, Paarmengenaxiom und Vereinigungsmengenaxiom) beweisbar.

Wir können auch die Bildung der Menge

$${}^{B}A := \{f :\ f \text{ Funktion von } A \text{ nach } B\}$$

rechtfertigen.

Weiters: $\mathrm{dom}(R) = \{x : \exists y\,(x,y) \in R\} = \{x \in \bigcup\bigcup R : \exists y\,(x,y) \in R\}$ [denn wenn $(x,y) \in R$, dann ist $x \in \{x\} \in (x,y) \in R$]

Ähnlich $\mathrm{ran}(R) = \{y : \exists x\,(x,y) \in R\}$.

Folgen

Eine unendliche "Folge" (von Elementen von A) ist eine Abbildung x mit $\mathrm{dom}(x) = \omega$ (und $\mathrm{ran}(x) \subseteq A$). Statt $x(n)$ schreiben wir manchmal x_n, und statt x schreiben wir manchmal $(x_0, x_1, \dots)$ (Hier sind die Punkte "..." ok, denn wir wissen, was wir damit meinen)

Eine "endliche Folge" ist eine Abbildung x mit $\mathrm{dom}(x) \in \omega$. $\mathrm{dom}(x)$ wird auch "Länge" der Folge genannt. ZB ist

$$\{(0,3),(1,1),(2,4),(3,1),(4,5)\}$$

eine "Folge der Länge 4". Diese Folge wird auch gerne als

$$\langle 3,1,4,1,5\rangle$$

geschrieben.

Rekursive Definition

Satz: es gibt genau eine "Addition" auf ω. Das heißt, es gibt genau eine Funktion $f : \omega \times \omega \to \omega$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\forall n \in \omega : f(\langle n, 0\rangle) = n$
2. $\forall n \in \omega\, \forall k \in \omega : f(\langle n, S(k)\rangle) = S(f(\langle n, k\rangle))$.

Bevor wir Addition definieren, zuerst ein technisch einfacheres Beispiel:

Sei $h : \omega \to \omega$ durch $h(0) = 1$, $h(n) = 0$ für $n \neq 0$ definiert, also

$$h = \{(n,k) \in \omega \times \omega : n = 0 \wedge k = 1 \;\vee\; n \neq 0 \wedge k = 0\}$$

definiert. Gibt es eine Funktion $f : \omega \to \omega$, die

$$f(0) = 0$$

$$f(S(n)) = h(f(n)) \text{ (also } f(S(n)) = 0 \text{ wenn } f(n) = 1,\ f(S(n)) = 1 \text{ wenn } f(n) = 0)$$

erfüllt? Intuitiv ja, nämlich die Funktion $f(n) = n \bmod 2$. Solange wir aber noch keinen Addition zur Verfügung haben, ist nicht klar, wie wir diese Mengen definieren sollen. Sobald wir diese Funktion haben, können wir z.B. die Menge der geraden Zahlen

$$\{0,2,4,6,8,\dots\} = \{n \in \omega : f(n) = 0\}$$

bilden.

ERSTER BEWEIS — "von unten"

Wir überlegen uns, wie denn Anfangsabschnitte unser gesuchten Funktion aussehen müssen, z.B. der Anfangsabschnitt $\{(0,0),(1,1),(2,0)\}$. Dann fassen wir diese Abschnitte mit dem Vereinigungsoperator zusammen.

Wir beweisen, dass so eine Funktion existiert, indem wir zunächst die Menge der "Anfangsabschnitte" unserer gesuchten Funktion definieren, also die Menge

$$\begin{aligned} A = \{&\{\},\\ &\{(0,0)\},\\ &\{(0,0),(1,1)\},\\ &\{(0,0),(1,1),(2,0)\},\\ &\{(0,0),(1,1),(2,0),(3,1)\},\\ &\{(0,0),(1,1),(2,0),(3,1),(4,0)\},\\ &\dots\\ &\} \end{aligned}$$

A können wir so definieren: A ist die Menge aller $x \subseteq \omega \times \omega$, die folgendes erfüllen:

1. x ist endliche Folge
2. Wenn $0 \in \mathrm{dom}(x)$, dann $x(0) = 0$
3. x "erfüllt die Rekursion", d.h., Für alle n: Wenn n und $S(n)$ in $\mathrm{dom}(x)$, dann $x(S(n)) = h(x(n))$

Sei nun

$$f := \{(n,k) \in \omega \times \omega : \exists x \in A\,(n \in \mathrm{dom}(x) \wedge x(n) = k)\}$$

Man kann sich nun überlegen (genauer: mit Hilfe von vollständiger Induktion beweisen), dass

a. f tatsächlich eine Funktion ist
b. $\mathrm{dom}(f) = \omega$ gilt
c. f die Rekursionsgleichung (also $f(S(n)) = h(f(n))$) erfuellt.

(Details siehe Anhang)

ENDE DES ERSTEN BEWEISES

ZWEITER BEWEIS — "von oben"

Wir werden die gesuchte Funktion als Durchschnitt von gewissen Relationen beschreiben. Sei $h = \{(0,1),(1,0)\}$, d.h. $h : \{0,1\} \to \{0,1\}$ vertauscht 0 und 1.

Nennen wir eine Relation $R \subseteq \omega \times \{0,1\}$ (nur für die Dauer dieses Beweises) "paritätisch", wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

1 $(0,0) \in R$

2 Wenn $(n,i) \in R$, dann auch $(n+1, h(i)) \in R$

Offensichtlich gibt es paritätische Relationen, zB ist ganz $\omega \times \{0,1\}$ eine solche. Weiters ist der Durchschnitt von zwei paritätischen Relationen wieder paritätisch.

Betrachten wir nun die Menge $\mathscr{R}$ aller paritätischen Relationen; da $\mathscr{R}$ nicht leer ist, können wir den Durchschnitt über $\mathscr{R}$ bilden, nennen wir ihn f:

$$f := \bigcap \mathscr{R} = \bigcap_{R \in \mathscr{R}} R$$

Offensichtlich ist f eine Relation, $f \subseteq \omega \times \{0,1\}$. Weiters können wir leicht zeigen, dass f paritätisch ist (analog zum Beweis, dass ω induktiv ist).

Nun behaupten wir dass f eine auf ganz ω definierte Funktion ist. Dazu bilden wir

$$A := \{n \in \omega : \exists!i\,(n,i) \in f\}$$

und zeigen, dass A induktiv ist (dann ist nämlich $A = \omega$, und $f(n)$ ist für alle $n \in A$ wohldefiniert).

Dass A induktiv ist, ist leicht.

Schließlich zeigen wir noch, dass f die Rekursion erfüllt, das ist auch leicht.

ENDE DES ZWEITEN BEWEISES

Rekursive Definition, Verallgemeinerungen

Der Bildbereich so einer "rekursiv" definierten Funktion muss nicht ω sein. Es gilt allgemeiner:

Satz: Sei C eine Menge, sei $h : C \to C$, $a \in \omega$. Dann gibt es genau eine Funktion $f : \omega \to C$, die $f(0) = a$ und $f(S(n)) = h(f(n))$ für alle $n \in \omega$ erfüllt.

Beweis ähnlich.

Es gilt sogar noch allgemeiner:

Satz: Sei $h : \omega \times C \to C$, $a \in \omega$. Dann gibt es genau eine Funktion $f : \omega \to \omega$, die $f(0) = a$ und $f(S(n)) = h(n, f(n))$ erfüllt.

Oder noch allgemeiner, mit "Parametern":

Satz: Sei A eine Menge. Sei $h : A \times \omega \times C \to C$, $g : A \to C$. Dann gibt es genau eine Funktion $f : A \times \omega \to C$, die $f(a, 0) = g(a)$ (für alle a) und $f(a, S(n)) = h(a, n, f(n))$ (für alle $a \in A$ und alle $n \in \omega$) erfüllt.

Mit den Funktionen $g : \omega \to \omega$, $g(n) = n$, und $h : \omega \times \omega \times \omega \to \omega$, $h(a, n, c) = S(c)$ erhalten wir eine Funktion $f : \omega \times \omega \to \omega$, die $f(a, 0) = a$, $f(a, S(n)) = S(f(a, n))$ erfüllt, also genau die Addition. Statt $f(a, n)$ schreiben wir künftig $a + n$. Statt $S(n)$ schreiben wir ab jetzt auch meistens $n + 1$.

Multiplikation und Exponentiation ähnlich.

Endliche Mengen

Die folgenden Ausführungen scheinen [sowie auch die vorhergehenden] pedantisch zu sein. Natürlich kann uns die Mengenlehre nichts über endliche Mengen erzählen, was wir nicht auch schon ohne sie wüssten. Wir betrachten diese Sätze und Definitionen aber als Aufwärmübung für den Umgang mit unendlichen Mengen.

Naiv gesprochen ist eine Menge endlich, wenn sie die Form $\{x_1, \ldots, x_n\}$ hat. Wir formalisieren diese Idee so:

Definition: Zwei Mengen A und B heißen gleichmächtig, wenn es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt.

Definition: Eine Menge A heißt "endlich", wenn A gleichmächtig zu einer natürlichen Zahl ist.

Satz: Sei $k \in n \in \omega$. Dann gibt es keine Bijektion von n nach k.

Beweisidee: Sei A die Menge aller $n \in \omega$, sodass es keine Bijektion von n auf irgendein $k < n$ gibt. Man muss nur zeigen, dass A induktiv ist...

Aus diesem Satz folgt, dass es zu jeder endlichen Menge A genau ein $n \in \omega$ gibt, welches zu A gleichmächtig ist. Wir nennen dieses n die Kardinalität von A: $n = |A|$.

Anmerkung: Aus $k \in n \in \omega$ folgt $k \in \omega$, und $k \subsetneq n$. Wir können sogar (wieder mit Induktion über n) zeigen: Wenn $n \in \omega$, $A \subsetneq n$, dann ist A nicht gleichmächtig mit n.

Folgerung: Eine endliche Menge ist niemals gleichmächtig zu einer echten Teilmenge. [Eine Menge mit dieser Eigenschaft heißt "Dedekind-endlich".]

Satz: Die Vereinigung von zwei endlichen Mengen A und B ist endlich.

Beweisidee: Betrachte die Menge C aller natürlichen Zahlen, für die gilt: Für alle endlichen Mengen A mit $|A| = n$ und für alle endlichen Mengen B ist $A \cup B$ endlich. Man muss zeigen, dass C induktiv ist...

Satz: Wenn A und B endlich sind, dann sind $A \times B$, $\mathscr{P}(A)$, ${}^{A}B$ auch endlich.

Beweis: ähnlich wie für die Vereinigung.

Man könnte $n + k$ auch so definieren: $n + k = |(n \times \{0\}) \cup (k \times \{1\}|$. (Da wir aber $n + k$ schon definiert haben, ist diese Beziehung jetzt ein Satz, den man mit Induktion beweisen müsste.)

Analog ist auch für alle $n, k \in \omega$:

$n \cdot k = |n \times k|$
$2^k = |\mathscr{P}(n)|$.
$n^k = |{}^k n|$.

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ erhalten wir in gewohnter Weise aus den natürlichen Zahlen: Wir definieren auf $\omega \times \omega$ die Äquivalenzrelation

$$(n,k) \sim (n',k') \;\Leftrightarrow\; (n+k' = k+n')$$

Die Menge der Äquivalenzklassen $\{(n,k)/\!\sim\, : n,k \in \omega\}$ bildet dann mit der Operation $(n,k)/\!\sim + (m,l)/\!\sim\, = (n+m, k+l)/\!\sim$ eine abelsche Gruppe, in die ω mit $n \mapsto (n,0)/\!\sim$ eingebettet wird. Diese Gruppe nennen wir $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Q}$ bekommen wir als Quotientenkörper von $\mathbb{Z}$. Die dazu notwendigen mengentheoretischen Operationen sind immer wieder Potenzmengenaxiom und Aussonderung.

$\mathbb{R}$ stellen wir uns als Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen vor, oder als Dedekindschnitte (also gewisse Teilmengen von $\mathbb{Q}$), wir brauchen also wieder das Potenzmengenaxiom.

Ersetzungsaxiom

Ein Problem mit rekursiven Definitionen ergibt sich, wenn wir eine Funktion $f : \omega \to C$ "rekursiv" [also durch einen Bedingung $f(S(n)) = \;\cdots f(n) \cdots$] definieren wollen, aber die Menge C noch nicht kennen. Zum Beispiel ist es intuitiv einleuchtend, dass es eine Folgen $(V_n : n \in \omega)$ geben soll, die $V_0 = \emptyset$, $V_{n+1} = \mathscr{P}(V_n)$ erfüllt:

$$\begin{aligned}
&V_0 = \emptyset = 0\\
&V_1 = \mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} = 1\\
&V_2 = \mathscr{P}(V_1) = \{\emptyset, 1\} = 2\\
&V_3 = \mathscr{P}(V_2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, V_2\} = \{0, 1, \{1\}, 2\}\\
&V_4 = \mathscr{P}(V_3) \text{ hat } 2^4 = 16 \text{ Elemente}\\
&V_5 = \mathscr{P}(V_4) \text{ hat } 2^{16} = 65536 \text{ Elemente}\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Um die Existenz solcher Folgen zu beweisen, brauchen wir das "Ersetzungsaxiom":

Für jede Formel $\varphi(x,y)$:

$$\forall A : \Big([\forall x \in A\, \exists! y : \varphi(x,y)] \;\Rightarrow \exists B [\forall x \in A \exists y \in B : \varphi(x,y)] \Big)$$

D.h., wenn es zu jedem Element $x \in A$ ein eindeutig bestimmtes y gibt, welches $\varphi(x,y)$ erfüllt (wenn also φ eine "Vorschrift" ist, mit Hilfe derer man eine Funktion im naiven Sinn definieren kann), dann gibt es auch eine Wertemenge, die alle Funktionswerte enthält.

Dies ist wieder eine Instanz des Komprehensionsprinzips, es wird die Existenz einer Menge

$$\{y : \exists x \in A\, \varphi(x,y)\}$$

postuliert.

In unserem Fall können wir zunächst definieren

$$\varphi(n,y) :\Leftrightarrow \exists x\, x \text{ ist endliche Folge der Länge} > n,\ x(0) = \emptyset,\ x(n) = y,\ x \text{ erfüllt } (*)$$

wobei $(*)$ die Bedingung

$$\forall k : k \in \mathrm{dom}(x) \,\wedge\, k+1 \in \mathrm{dom}(x) \Rightarrow x(k+1) = \mathscr{P}(x(k))$$

ist. Wir zeigen dann mit Induktion

$$\forall n \in \omega\, \exists! y : \varphi(n, y),$$

daher gilt wegen des Ersetzungsprinzips $\exists B\, \forall n \in \omega\, \exists y \in B\, \varphi(n, y)$.

Wir können also unsere gesuchte Funktion als

$$f = \{(n, y) \in \omega \times B : \varphi(n, y)\}$$

darstellen. Statt $\varphi(n, y)$ schreiben wir $y = V_n$.

Endliche und unendliche Mengen

Definition: Zwei Mengen A und B heißen gleichmächtig: wenn es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt. Wir schreiben dann $A \approx B$.

$A \precsim B$ heißt: Es gibt eine injektive Abbildung $f : A \to B$; anders gesagt: Es gibt eine Menge $A' \subseteq B$, $A \approx A'$. (nämlich $A' = f[A]$).

Satz: Wenn $A \precsim B$ und $B \precsim A$, dann $A \approx B$.

Dieser Satz ist nicht trivial (wie soll man aus zwei Injektionen so einfach eine Bijektion herstellen?), wir weden in erst später beweisen.

Die Beziehung $\approx$ hat die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation (reflexiv, symmetrisch, transitiv).

Wir können nicht sagen, dass $\{(A, B) : A \approx B\}$ eine Äquivalenzrelation ist, weil es diese Menge gar nicht gibt, d.h.: $\neg\exists R : \forall A \forall B : A \approx B \Rightarrow (A, B) \in R$, denn der Definitionsbereiche von so einem R wäre die Allmenge, die es ja nicht gibt. [Zu jeder Menge V gibt es nämlich eine Menge $x \notin V$, z.B. $R := \{x \in V : x \notin x\}$]

Definition: Eine Menge A heißt "endlich", wenn A gleichmächtig zu einer natürlichen Zahl ist. Eine Menge A heißt unendlich, wenn A nicht endlich ist.

Zu jeder endlichen Menge gibt es genau ein $n \in \omega$ mit $n \approx A$, wir nennen es $|A|$.

Satz: 1. Jede Teilmenge einer endlichen Menge ist endlich.
1'. Jede Obermenge einer unendlichen Menge ist unendlich.
2. Eine endliche Menge ist niemals zu einer echten Teilmenge gleichmächtig.

Beweis: 1. Es genügt zu zeigen, dass für alle $n \in \omega$ alle Teilmengen von n endlich sind. Daher müssen nur zeigen, dass die Menge

$$\{n \in \omega : \text{ Alle Teilmengen von } n \text{ sind endlich}\}$$

induktiv ist...
1.' folgt aus 1.
2. Wieder müssen wir nur zeigen, dass eine natürliche Zahl n niemals zu einer echten Teilmenge gleichmächtig sein kann...

Nachdem ω zu $\omega \setminus \{0\}$ gleichmächtig ist ($f(n) = S(n)$ ist Bijektion), ist ω unendlich.

Familien: eine *façon de parler*

Wenn A eine Menge ist, kann jedes Objekt nur entweder $x \in A$ oder $x \notin A$ erfüllen, z.B. ist $\{7, 7\}$ laut Definition $\{x : x = 7 \vee x = 7\}$, also $= \{7\}$. Wenn wir auch die Situation modellieren wollen, dass Elemente "mehrfach" enthalten sind, verwenden wir Familien.

Definition: Eine "Familie" ist einfach eine Funktion.

Wir nennen eine Funktion dann "Familie", wenn es uns mehr auf den Wertebereich der Funktion als auf die Funktion selber ankommt. Den Definitionsbereich einer Familie nennen wir die "Indexmenge" der Familie.

Schreibweise: Sei $F : I \to A$ Familie. Wir schreiben wir F_i statt $F(i)$. Statt F schreiben wir auch oft $(F_i : i \in I)$.

Definition: Wir nennen zwei Familien $(A_i : i \in I)$ und $(B_j : j \in J)$ "im wesentlichen gleich", wenn es eine Bijektion ("Umnumerierung") $f : I \to J$ gibt, sodass für alle $i \in I$ $A_i = B_{f(i)}$ gilt.

Beispiel: Sei $I = \{3, 4, 5\}$, $J = \{5, 12, 13\}$.

Sei $x_3 = 7 = y_{13}$, $x_4 = 5 = y_{12}$, $x_5 = 7 = y_5$. Dann sind $(x_i : i \in I)$ und $(y_j : j \in J)$ "im wesentlichen gleich". (Sie modellieren beide eine "Multimenge", die die Zahl 5 einmal und die Zahl 7 zweimal enthält.)

Wenn wir eine Funktion als Familie schreiben, deuten wir damit an, dass es uns bei dieser Funktion nicht auf Umnumerierungen ankommt.

Wenn wir zum Beispiel die Menge $\{(n, n*n) : n \in \mathbb{Z}\}$ als Funktion auffassen ("die Quadrierungsfunktion ist symmetrisch"), müssen wir sie von der Menge $\{n+1, n*n) : n \in \mathbb{Z}\}$ unterscheiden.

Wenn wir aber von dieser Menge als Familie sprechen ("in der Familie aller Quadratzahlen kommt jedes Element außer 0 doppelt vor"), deuten wir an, dass uns der Unterschied zwischen $\{(n, n*n) : n \in \mathbb{Z}\}$ und $\{n+1, n*n) : n \in \mathbb{Z}\}$ nicht interessiert.

Schreibweise: Sei $F = (F_i : i \in I)$ Familie. Wir schreiben $\bigcup_{i \in I} F_i$ für $\bigcup \mathrm{ran}(F)$, also für die Menge $= \{y : \exists i \in I \ y \in F_i\}$.

Auswahlaxiom

Satz: Eine Menge A ist genau dann unendlich, wenn $\omega \leq A$.

Diesen Satz können wir mit den bisher besprochenen Axiomen noch nicht beweisen, wir brauchen dazu das Auswahlaxiom.

Wir besprechen zuerst einige triviale Varianten des Auswahlaxioms:

AC_1: $\forall X \, \exists f : \mathscr{P}(X) \to X : \big[\forall Y \subseteq X : Y \neq \emptyset \Rightarrow f(Y) \in Y\big]$
Die Funktion f, die aus jeder nichtleeren Teilmenge $Y \subseteq X$ ein Element $f(Y) \in Y$ auswählt, heißt "Auswahlfunktion".

AC_1': wie in AC_1, aber f bracuht nur auf $\mathscr{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ definiert zu sein, da uns der Wert $f(\emptyset)$ sowieso nicht interessiert.

AC_2: $\forall \mathscr{A} : \big[\forall B \in \mathscr{A} \ B \neq \emptyset\big] \Rightarrow \big[\exists f : \mathscr{A} \to \bigcup A, \forall B \in \mathscr{A} : f(B) \in B\big]$
Also: Für jede Menge $\mathscr{A}$ nichtleerer Mengen gibt es eine "Auswahlfunktion", die jedem Element von $\mathscr{A}$ eines seiner Elemente zuordnet.
(Äquivalenz von AC_1' und AC_2: Setze $\mathscr{A} :\ \mathscr{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$, bzw. setze $X := \bigcup \mathscr{A}$.

AC_3: Wie AC_2, aber mit einer Familie statt einer Menge:
$\forall F = (F_i : i \in I) : \big[\forall i \, F_i \neq \emptyset\big] \Rightarrow \big[\exists f : I \to \bigcup_{i \in I} F_i, \ \forall i \in I \ f(i) \in F_i\big]$.
(Das ist äquivalent zu AC_2. Man kann nämlich jede Menge $\mathscr{A}$ als Familie $F : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ sehen, $F_A = A$.)

AC_4 $\forall X \, \exists g : \mathscr{P}(X) \to X : \big[\forall Y \subsetneqq X : g(Y) \in X \setminus Y\big]$
Eine Funktion g wie hier, die also jeder echten Teilmenge von $Y \subsetneqq X$ ein Element in $X \setminus Y$ zuordnet, nenne

ich "Rauswahlfunktion." (Aus einer Auswahlfunktion wie in AC_1' kann man leicht eine Rauswahlfunktion bekommen, und umgekehrt.)

Ist das Auswahlaxiom "wahr"? Aber was heißt schon "wahr"?

Jedenfalls wird das Auswahlaxiom von den meisten Mathematikern unbekümmert verwendet, also als "Wahrheit" erkannt (oder behauptet). Die Problematik liegt vor allem darin, dass — im Gegensatz zu den anderen Mengenbildungsaxiomen (Nullmenge, Paarmenge, Vereinigungsmenge, Potenzmenge, Aussonderung, Ersetzung, Unendlichkeitsaxiom) die Existenz einer Funktion (also Menge) f gefordert wird, die *nicht* durch eine Formel $z \in f \Leftrightarrow ...$, also $f = \{z : ...\}$ beschrieben wird.

Als Argument für die "Wahrheit" des Auswahlaxioms kann man folgenden Satz anführen, der in ZF (also ohne AC) beweisbar ist:

Satz: Sei $\mathscr{A}$ endliche Menge von nichtleeren Mengen. Dann gibt es eine Auswahlfunktion für A.

Wir werden im folgenden das Auswahlaxiom ohne Skrupel als "wahr" annehmen, aber gelegentlich darauf hinweisen, wo es in einem Beweis verwendet wird.

Als erstes Beispiel einer Anwendung des Auswahlaxioms:

Satz: Eine Menge A ist genau dann unendlich, wenn $\omega \leq A$.

Beweis: Sei A unendlich. Wir wissen, dass dann auch $A \setminus B$ unendlich ist, für jede endliche Teilmenge $B \subseteq A$.

Sei f eine "Rauswahlfunktion" für A, also $f(B) \in A \setminus B$ für alle $B \subsetneqq A$. Wir definieren eine Folge (Familie, Funktion) $(B_n : n \in \omega)$ wie folgt:

$$B_0 = \emptyset$$
$$B_{n+1} = B_n \cup \{f(B_n)\}$$

(Wir verwenden hier den Satz über rekursive Definition). Wir können leicht zeigen (mit Induktion), dass B_n immer endlich ist, und genau n Elemente hat. Sei $g(n) := f(B_n)$, dann gilt (Beweis?): Die Funktion $g : \omega \to A$ is injektiv, also $\omega \precsim A$.

Unendliche Produkte

Sei $(X_i : i \in I)$ eine Familie von Mengen. $\prod_i X_i$ sei die Menge aller Funktionen $f : I \to \bigcup_i X_i$, die
$$\forall i \in I : f(i) \in X_i$$
erfüllen.
(Analog: Sei $\mathscr{X}$ Menge von Mengen. $\prod \mathscr{X}$ sei die Menge aller $f : \mathscr{X} \to \bigcup \mathscr{X}$, die $f(Y) \in Y$ für alle $Y \in \mathscr{X}$ erfüllen.)

Beispiel: Sei $I = \{0, 1\}$. Dann ist $\prod_{i \in I} X_i$ in natürlicher Weise isomorph zu $X_0 \times X_1$: Elemente von $\prod_{i \in I} X_i$ sind Funktionen von der Form $\{(0, x), (1, y)\}$ (mit $x \in X_0$, $y \in X_1$), und Elemente von $X_0 \times X_1$ sind geordnete Paare (x, y).

Wohlordnung

Definition: Sei A Menge, $R \subseteq A \times A$ eine partielle Ordnung. [R kann hier entweder strikte partielle Ordnung sein, also transitiv+antireflexiv, dann schreiben wir statt R manchmal auch $<$ oder $\lhd$ oder $\prec$, oder R ist reflexiv, transitiv, antisymmetrisch, dann schreiben wir für R manchmal $\leq$, $\unlhd$ oder $\preceq$.]
Wir nennen (A, R) "Wohlordnung", wenn jede nichtleere Teilmenge $B \subseteq A$ ein minimales Element hat.

[$b \in B$ heißt minimal, wenn es kein $c \in B$ gibt mit cRb, außer höchstens $b = c$.]

Der Begriff der Wohlordnung ist ein zentraler Begriff in der Mengenlehre, und ein Schlüssel für die Analyse unendlicher Mengen.

Beispiel: Jede endliche natürliche Zahl ist wohlgeordnet (durch $\in$). Beweis mit Induktion.
ω ist wohlgeordnet.

Das ergibt sich aus folgendem Satz:

Lemma: Sei $(A, <)$ lineare Ordnung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $(A, <)$ ist wohlgeordnet
2. Für jedes $a \in A$ ist (die Einschränkung von $<$ auf) die Menge
$$A_{<a} := \{b \in A : b < a\}$$
eine Wohlordnung.
3. Für jedes $a \in A$ gibt es ein $a' \in A$, $a \leq a'$, sodass $A_{<a'}$ Wohlordnung ist.

Definition: Sei $(A, <)$ Wohlordnung. Zu jedem Element a (ausser dem maximalen, falls es so eines gibt) gibt es einen "Nachfolger", den wir mit manchmal mit "$a + 1$" oder $a +^{(A,<)} 1$ bezeichnen:
$$a + 1 := \min\{b \in A : b > a\}$$

Wir nennen $a \in A$ "Limeselement", wenn a nicht von der Form $b + 1$ ist.

Beispiel: Die lexikographische Ordnung auf $\omega \times \omega$ ist eine Wohlordnung. Der nachfolger von (n, k) ist $(n, k + 1)$. Die Limeselemente sind die Paare $(n, 0)$ für alle $n \in \omega$.

Definition: $B \subseteq$ heißt 'Anfangsabschnitt' von A wenn B nach unten abgeschlossen ist: $\forall b \in B\, \forall c \in A : c < b \Rightarrow c \in B$.

Satz: Jeder echte Anfangsabschnitt in einer Wohlordnung ist von der Form $A_{<a}$ für ein $a \in A$.

Beispiele für Wohlordnungen: $(n, \in)$ für jede natürliche Zahl n. $(\omega, \in)$, $(\omega + 1, \in)$, $(\omega + 2, \in)$, $\ldots$, $(\omega + \omega, \in)$, $\ldots$ sind auch WO, wobei
$$\begin{aligned}
\omega + 1 &= \omega \cup \{\omega\} \\
\omega + 2 &= \omega + 1 \cup \{\omega + 1\} = \omega \cup \{\omega, \omega + 1\}. \\
&\ldots \\
\omega + \omega &= \omega \cup \{\omega, \omega + 1, \ldots\}
\end{aligned}$$

Wie sieht nun eine Wohlordung $(A, <)$ aus? Es gibt zwei Fälle: $A = \emptyset$, oder es gibt ein minimales Element von A, nennen wir es $a_0 = \min A$.

Wenn $A \neq \emptyset$, dann gibt es wieder 2 Fälle: Entweder $A = \{a_0\}$, oder es gibt ein minimales Element $> a_0$, nennen wir es $a_1 := \min(A \setminus \{a_1\})$.

Wieder gibt es zwei Fälle: Entweder $A = \{a_0, a_1\}$, oder wir können $a_2 := \min(A \setminus \{a_0, a_1\})$ definieren.

...

Wenn A unendlich ist, gibt es wieder zwei Fälle: Entweder $A = \{a_n : n \in \omega\}$, oder $A \setminus \{a_n : n \in \omega\} \neq \emptyset$. In letzterem Fall sei $a_\omega := \min(A \setminus \{a_n : n \in \omega\})$.

Und so weiter.

Mit anderen Worten, alle Wohlordnungen sehen gleich aus, nur hört die eine früher auf, die andere später.

Wir können das so formalisieren:

Satz: Seien $(A,<)$ und $(B,<)$ Wohlordnungen. Dann gilt genau einer der drei Fälle:

1. $(A,<) \simeq (B,<)$.
2. Es gibt ein $a \in A$ mit $(A_{<a},<) \simeq (B,<)$.
3. Es gibt ein $b \in B$ mit $(A,<) \simeq (B_{<b},<)$.

Weiters gilt: In jedem Fall ist der Isomorphismus eindeutig bestimmt.

Um Eindeutigkeit zu beweisen, ist folgendes Lemma oft hilfreich:

Lemma:

1. Wenn $(A,<)$ WO, $f:(A,<) \to (A,<)$ strikt monoton, dann ist $f(a) \geq a$ für alle $a \in A$.
2. Eine WO $(A,<)$ ist niemals zu einer Teilmenge eines echten Anfangsabschnitts von A isomorph.

Beweis: (1.) Sei a minimal mit $f(a) < a$. Sei $b := f(a)$. Dann ist $b = f(a) > f(b)$, weil f monoton ist. Aber $f(b) < b$ widerspricht der Minimalität von a.

(2.) Folgt aus (1.)

Satz: ["Definition durch transfinite Rekursion"] Sei $(A,<)$ Wohlordnung, B eine Menge, C die Menge aller partiellen Funktionen von A nach B, deren Definitionsbereich eine Anfangsabschnitt von A ist.

Sei $h: C \to B$.

Dann gibt es genau eine Funktion $f: A \to B$, die

$$\forall a \in A: \quad f(a) = h(f{\restriction}\{b \in A : b < a\})$$

erfüllt.

Beweis des Satzes über Definition durch transfinite Rekursion:

Ähnlich wie für Rekursion über natürliche Zahlen betrachten wir Anfangsabschnitte der gesuchten Funktion: Sei G die Mengen aller g mit:

dom(g) ist Anf.ab von A

$g(a) = h(g{\restriction}\{b \in \mathrm{dom}(g) : b < a\})$

Man kann zeigen, dass es auf jedem Anf.ab $B \subseteq A$ höchstens ein $g \in G$ gibt mit $\mathrm{dom}(g) = B$. Weiters kann man zeigen, dass alle $g \in G$ zusammenpassen, d.h., dass

$$f := \bigcup G$$

eine Funktion ist. dom(f) muss eine Anf.ab von A sein, wenn $\mathrm{dom}(f) = A_{<a}$ wäre, dann führt

$$f' := f \cup \{(a, h(f)\}$$

leicht auf einen Widerspruch.

Die Eindeutigkeit von f ist klar — wenn f, f' die Rekursionsbedingung erfüllen, dann betrachte $\min\{a \in A : f(a) \neq f'(a)\}$.

Variante: (des Satzes über transfinite Rekursion)
Sei $(A,<)$ WO, B irgendeine Menge, h irgendeine Funktion. Dann gibt es eine [eindeutig bestimmte] partielle Funktion $f: A \to B$ mit:

dom(f) ist Anf.ab von A

Für alle $a \in \mathrm{dom}(f)$ ist $f(a) = h(f{\restriction}A_{<a})$

Wenn $\mathrm{dom}(f) \neq A$, dann ist $h(f)$ nicht definiert.

Beweis des Vergleichbarkeitssatzes: Zunächst zur Eindeutigkeit: Wenn $f:(A,<) \to (B,<)$ ein Isomorphismus ist, dann kann man zeigen, dass f die Rekursionsbedingung

$$f(a) = \min(B \setminus \mathrm{ran}(f{\restriction}A_{<a}))$$

erfüllen muss. Aus dem Rekursionssatz folgt nun die Eindeutigkeit. (Ähnlich für die anderen beiden Fälle).

Wir fügen eine Element $\bar{b}$ zu B hinzu, $\bar{B} := B \cup \{\bar{b}\}$, und wenden das Rekursionstheorem auf folgende FUnktion h an: $h(g) = \min(B \setminus \mathrm{ran}(g))$, wenn $\mathrm{ran}(g) \subsetneq B$, und $h(g) = \bar{b}$ sonst.

Wir finden also eine Funktion $f: A \to \bar{B}$ mit:

$$f(a) = \min(B \setminus \mathrm{ran}(f{\restriction}A_{<a})) \qquad \text{wenn möglich}$$

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. $\mathrm{ran} f = B$, dann ist f Isomorphismus zwischen A und B.
2. Es gibt ein a mit $f(a) = \bar{b}$. Sei a minimal mit dieser Eigenschaft, dann ist $f : A_{<a} \to B$ Iso.
3. Es gibt ein $b \in B \setminus \mathrm{ran} f$, sei b minimal mit dieser Eigenschaft, dann ist $f : A \to B_{<b}$ Iso.

Lemma: Sei X irgendeine Menge. Sei $W := \{(A, R) : A \subseteq X,\ R \text{ WO auf } A\}$. Sei $W' = W/\sim$, wobei $\sim$ Isomorphie von WO sein soll. Auf $W' := W/\sim$ definieren wir in natürlicher Weise eine Ordnungsrelation, entsprechend dem Vergleichbarkeitssatz. Dann gilt:

a. Diese Ordnung ist eine WO.
b. Es gibt keine injektive Funktion $f : W' \to A$.

Wohlordnungssatz: Jede Menge lässt sich wohlordnen.

Dieser Satz ist äquivalent zum Auswahlaxiom (d.h., die Äquivalenz lässt sich mit Hilfe der anderen ZF-Axiome beweisen.)

Beweisidee: Sei X irgendeine Menge. Seien W, W' wie oben.

Sei $f : \mathscr{P}(X) \setminus \{X\}$ eine "Rauswahlfunktion", also $f(A) \in X \setminus A$ für alle $A \neq \emptyset$.

Es gibt eine eindeutig bestimmte partielle Funktion $g : W' \to A$, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $g(w) = f(A \setminus \mathrm{ran}(g \restriction W'_{<w}))$ für alle $w \in dom(g)$
2. $\mathrm{dom}(g) \subsetneqq W'$. (Sonst wäre $g : W' \to A$ injektiv)
3. $f(A \setminus \mathrm{ran}(g))$ ist undefiniert.

Daher ist $A = \mathrm{ran}(g)$, g ist also Iso zwischen einem Anf.ab von W' und A, induziert also eine WO auf A.

Modelltheorie

Die “Sprache der Mengenlehre” baut sich aus den folgenden Grundbausteinen auf

Variable: $x, y, \ldots$

Die Symbole $\in$ und $=$

Logische Junktoren: $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\neg$, etc.

Logische Quantoren: $\forall$, $\exists$.

Klammern [die lassen wir oft aus Bequemlichkeit weg]

Aus diesen Grundbausteinen können wir in natürlicher Weise Formeln bilden, z.B. $\forall x\, \exists y : (x \in y)$.

Wir unterscheiden zwischen “gebundenen” und “freien” Variablen. Statt einer formalen Definition diene ein Beispiel: In

$$\forall x\, \exists y : (x \in y \vee z \notin x)$$

sind x und y gebunden, z ist frei.

In der Formel $(\exists x\, x \in y) \wedge (\forall y\, y = x)$ ist x im linken Teil gebunden, im rechten frei, und y ist im linken Teil frei, rechts gebunden. Wir identifizieren Formeln, die durch Umbenennung gebundener Variablen auseinander hervorgehen, und wählen Formeln stets so, dass dieselbe Variable immer nur frei oder nur gebunden vorkommt – wenn gebunden, dann nur durch einen einzigen Quantor.

Sei M Menge. Unter einer M-Formel verstehen wir eine Formel, in der gewisse (möglicherweise alle, möglicherweise keine) freie Variable durch Elemente von M ersetzt worden sind.

Freie Variable deuten wir oft explizit an, statt φ schreiben wir etwa $\varphi(x, y)$. Wenn $m \in M$, dann ist $\varphi(m, y)$ jene Formel, die aus $\varphi(x, y)$ entsteht, wenn allen freien Vorkommnisse von x durch m ersetzt worden sind.

Sei M nichtleere Menge, $E \subseteq M \times M$ eine binäre Relation auf M. Wir schreiben $\mathscr{M}$ für das Paar (M, E). Für jede geschlossene M-Formel definieren wir, ob die Beziehung

$$\mathscr{M} \models \varphi$$

gilt oder nicht gilt, indem wir das $=$-Symbol durch die Gleichheit interpretieren, das $\in$-Symbol durch die Relation E, und die Quantoren also Quantifizierungen über die **Elemente** von M.

Wir lesen $\mathscr{M} \models \varphi$ als: “$\mathscr{M}$ erfüllt φ” oder “φ gilt in $\mathscr{M}$” oder “$\mathscr{M}$ glaubt φ” oder “$\mathscr{M}$ ist ein Modell für φ. Wenn $\mathscr{M} \models \varphi$ nicht gilt, dann schreiben wir $M \not\models \varphi$.

(Achtung: Quantoren werden immer über Elemente von M interpretiert, nicht als Teilmengen!)

Beispiel: Sei $\varphi(x, y)$ die Formel $x \in y \vee x = y$. Seien m, n Elemente von M. Dann bedeutet

$$(M, E) \models \varphi(m, n) \qquad \text{also:} (M, E) \models m \in n \vee m = n,$$

dass entweder $(m, n) \in E$ oder $m = n$ (oder beides).

Weiteres Beispiel: $(M, E) \models \forall x (x \in n \vee x = n)$ bedeutet, dass für alle Elemente $m \in M$ mindestens eine der Beziehungen

(1) “$(M, E) \models m \in n$” (also: $(m, n) \in E$)

(2) “$(M, E) \models m = n$” (also: $m = n$)

gilt.

$(M, E) \models ZFC$ bedeutet, dass $(M, E) \models \varphi$ gilt, für alle Axiome φ in ZFC. Im allgemeinen ist das nicht leicht nachzuprüfen.

Beispiel: Betrachten wir das Modell $\mathscr{M}_1 = (M_1, E_1)$ mit $M_1 = \{a\}$, $E_1 = \emptyset$. (Welche Menge a ist, ist egal – isomorphe Modelle erfüllen offensichtlich dieselben Eigenschaften.)

Dann erfüllt $\mathscr{M}_1$ das Nullmengenaxiom, aber nicht das Paarmengenaxiom, nicht einmal die schwache Form.

Beispiel: $\mathscr{M}_2 = (M_2, E_2)$, wobei $M_2 = \omega$, $E_2 = \{(m, n) : m < n\}$. $\mathscr{M}_2$ erfüllt das Paarmengenaxiom in der schwachen Form:

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_2 \models \forall x\, \forall y\, \exists z(x \in z \ \wedge\ y \in z) \text{ gdw: } & \text{für alle } m \in \omega: \ (\omega, <) \models \forall y \exists z(m \in z \ \wedge\ y \in z)\\ \text{gdw: } & \text{für alle } m \in \omega \text{ für alle } n \in \omega\ (\omega, <) \models \exists z(m \in z \ \wedge\ n \in z)\\ \text{gdw: } & \text{es für alle } m, n \in \omega \text{ ein } k \text{ gibt mit: } (\omega, <) \models (m \in k \ \wedge\ n \in k)\\ \text{gdw: } & \text{es für alle } m, n \in \omega \text{ ein } k \text{ gibt mit: } m < k \text{ und } n < k\end{aligned}$$

Das Modell $(V_\omega, \in)$ erfüllt alle ZFC-Axiome bis auf das Unendlichkeitsaxiom. V_ω ist als $\bigcup_{n\in\omega} V_n$ definiert, wobei $V_0 = \emptyset$, $V_{n+1} = \mathscr{P}(V_n)$.

Wir können auch $V_{\omega+1} := \mathscr{P}(V_\omega)$ bilden, allgemein $V_{\omega+n+1} = \mathscr{P}(V_{\omega+n})$, und schließlich: $V_{\omega+\omega} = \bigcup_{n\in\omega} V_{\omega+n}$.

Dann erfüllt $V_{\omega+\omega}$ alle ZFC-Axiome bis auf das Ersetzungsaxiom.

Eine “konkrete” Realisierung von V_ω: Betrachte die Relation $E \subseteq \omega \times \omega$, die aus allen Paaren (n, k) besteht für die gilt:

$\left[\frac{n}{2^k}\right] \equiv 1 \bmod 2$, d.h., das k-te Bit in der Binaärdarstellung von n ist 1 (beginnend mit dem 0-ten Bit.

Dann ist (ω, E) isomorph zu $(V_\omega, \in)$. Der Isomorphismus $f : \omega \to V_\omega$ erfüllt z.B.: $f(0) = \emptyset$, $f(10) = f(2^3 + 2^1) = \{f(3), f(1)\}$. $f(3) = f(2^1 + 2^0) = \{f(1), f(0)\} = \{\{0\}, 0\} = 2$. $f(2) = f(2^1) = \{f(1)\} = \{1\}$.

Auswahlaxiom und Zornsches Lemma

Für jede Menge A definieren wir eine Wohlordnung $H(A)$ so: Wir betrachten $W = \{(A, R) : A \subseteq X, R \text{ WO auf } A\}$. Sei $H(A) = W/\!\sim$, wobei $\sim$ Isomorphie von WO sein soll. Auf $H(A)$ definieren wir in natürlicher Weise eine Ordnungsrelation, entsprechend dem Vergleichbarkeitssatz. Dann gilt:

a. Diese Ordnung ist eine WO.

b. Es gibt keine injektive Funktion $f : H(A) \to A$.

Satz: Die folgenden Aussagen sind zum Auswahlaxiom äquivalent:

1 Jede Menge lässt sich wohlordnen. ("Wohlordungssatz")

2 Für alle Mengen A, B gilt $A \precsim B$ oder $B \precsim A$

3 In jeder Halbordnung $(P, \leq)$ gibt es es eine maximale Kette (Hausdorffsches Maximalprizip)

[Kette = linear geordnete Teilmenge. maximale Kette = eine Kette mit der Eigenschaft, dass jede echte Obermenge keine Kette mehr ist.]

4 In jeder Halbordnung $(P, \leq)$, in der alle Ketten beschränkt sind, gibt es ein maximales Element. ("Zornsches Lemma")

[Eine Menge $A \subseteq P$ heißt beschraenkt, wenn es eine "Schranke" $p \in P$ gibt, d.h. ein p mit $\forall a \in a : a \leq p$. Wir nennen p "strikte" Schranke von A, wenn sogar $a < p$ für alle $a \in A$ gilt.]

5 Für alle Mengen A gilt: Jede $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(A)$ von endlichem Charakter hat ein maximales Element.

Eine Menge $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(A)$ heißt "von endlichem Charakter", wenn gilt:
Für alle $X \subseteq A$: $X \in \mathscr{F}$ gdw: Alle endlichen Teilmengen von X sind in $\mathscr{F}$. Beispiel 1: X ein Vektorraum, $E \in \mathscr{F} \Leftrightarrow E \subseteq X$ ist linear unabhängig. Beispiel 2: X eine partielle Ordnung, $E \in \mathscr{F} \Leftrightarrow E \subseteq X$ ist eine Kette.

Beweis: (Skizze) Wir nehmen das Auswahlaxiom an und beweisen (4). Für jede Kette $K \subseteq P$ sei $S(K)$ die Menge aller strikten oberen Schranken von K. Wenn es eine Kette gibt, die zwar eine Schranke p, aber keine strikte Schranke hat, dann muss p maximal sein und wir sind fertig.

Wenn aber nicht, dann ist $S(K)$ nie leer. Sei $f : \mathscr{P}(P) \to P$ Auswahlfunktion. Mit transfiniter Rekursion definieren wir eine Funktion $g : H(A) \to A$:

$$g(w) = f(S(\{w' \in H(A) : w' < w\}))$$

Man zeigt nun, dass $\{w' \in H(A) : w' < w\}$ immer eine Kette ist, daher ist g wohldefiniert. g ist aber auch injektiv, Widerspruch.

(4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) ist leicht.

(5) $\Rightarrow$ (2): Sei $X = A \times B$, $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(A \times B)$ die Menge aller partiellen INJEKTIVEN Funktionen von A nach B. $\mathscr{F}$ ist von endlichem Charakter. Wenn $f \in \mathscr{F}$ maximal ist, dann muss $\mathrm{dom}(f) = A$ oder $\mathrm{ran}(f) = B$ gelten...

(2) $\Rightarrow$ (1): Vergleiche X und $H(X)$...

(1) $\Rightarrow$ (2): Verwende Vergleichbarkeit von Wohlordnungen.

Einschub: Induktionsbeweise

Mit Hilfe der vollsändigen Induktion können wir nun folgende Eigenschaften der natürlichen Zahlen zeigen:

1. Jedes Element $n \in \omega$ ist entweder Form $S(k)$, für ein $k \in \omega$, oder $= 0 = \emptyset$, d.h.
$$\forall n \in \omega \big[n = 0 \vee \exists k \, n = S(k) \big]$$
Beweis: Es ist zu zeigen, dass die Menge $A := \{n \in \omega : n = 0 \vee \exists k \, n = S(k)\}$ induktiv ist, also
   1.1 $0 \in A$, also $0 = 0 \vee \exists k \, n = S(k)$. Klar.
   1.2 $\forall n \in A : S(n) \in A$. Also: Wenn $n = 0 \vee \exists k \, n = S(k)$, dann auch $S(n) = 0 \vee \exists k \, S(n) = S(k)$.
   Die "Induktionsoraussetzung", also
$$n = 0 \vee \exists k \, n = S(k)$$
   brauchen wir hier (ausnahmsweise) gar nicht, denn
$$S(n) = 0 \vee \exists k \, S(n) = S(k)$$
   ist leicht zu beweisen: Gegeben n, wähle $k := n$, das beweist $\exists k \, S(n) = S(k)$.
2. $\forall n \in \omega : \big[n = 0 \vee 0 \in n \big]$.
Beweis: Wir zeigen, dass die Menge $A := \{n \in \omega : n = 0 \vee 0 \in n\}$ induktiv ist.
   2.1 $0 \in A$ ist klar.
   2.2 Wenn $n \in A$, ist dann auch $S(n) = n \cup \{n\} \in A$? Weil $n \in A$ (nach "Induktionsvoraussetzung") ist entweder $n = 0$ [also $0 \in \{0\} = S(0) = S(n)$], oder $0 \in n$ [dann auch $0 \in n \cup \{n\} = S(n)$], also in jedem Fall $S(n) \in A$.
3. Jede Zahl $n \in \omega$ ist "fast" induktiv:
$$\forall n \in \omega : \big[\forall x \in n : (S(x) \in n \vee S(x) = n) \big]$$
Beweis: Sei wieder $A := \{n \in \omega : \forall x \in n : (S(x) \in n \vee S(x) = n)\}$.
   3.1 "$\forall x \in 0 : (S(x) \in n \vee S(x) = n)$" ist wahr, weil es keine $x \in 0$ gibt.
   3.2 Induktionsannahme:
$$\forall x \in n : (S(x) \in n \vee S(x) = n)$$
   Sei nun $x \in S(n)$. Zu zeigen ist $S(x) \in S(n) \vee S(x) = S(n))$.
   Nach Definition von $S(n)$ haben wir $x \in n \cup \{n\}$, also ist entweder $x \in n$ oder $x = n$. Im ersten Fall ist $S(x) \in n \vee S(x) = n$, also jedenfalls $S(x) \in n \cup \{n\} = S(n)$. Im zweiten Fall ist $S(x) = S(n)$.
4. Alle natürlichen Zahlen sind "transitiv":
$$\forall n \in \omega : \big[\forall x \in n : x \subseteq n \big]$$
Zum Beweis zeige man, dass $\{n \in \omega : \forall x \in n \, [x \subseteq n]\}$ induktiv ist.
5. Trichotomie:
$$\forall n \in \omega \big[\forall k \in \omega : (k \in n \vee n \in k \vee n = k) \big]$$
Im Beweis verwendet man 1. und 3.
6. Irreflexivität: $\forall n \in \omega : n \notin n$.
7. Mit der Definition $k < n \Leftrightarrow k \in n$ wird ω zu einer linearen Ordnung. Weiters ist $k \leq n$ genau dann, wenn $k \in n \vee k = n$, genau dann, wenn $k \subseteq n$.

Axiome von ZFC

(Der Vollständigkeit halber werden hier alle ZFC-Axiome angegeben, auch wenn wir in diesem Semester nicht dazu kommen werden, alle zu besprechen.)

Nullmengenaxiom $\exists N\ \forall x : x \notin N$. (also $N = \emptyset$)

Paarmengenaxiom $\forall x\, \forall y\, \exists p$:

$$\forall z[z \in p \Leftrightarrow z = x \vee z = y] \qquad \text{(also } p = \{x, y\}\text{)}$$

Paarmenge, schwache Form $\forall x\, \forall y\, \exists p : x \in p \wedge y \in p$ (also $p \supseteq \{x, y\}$)

Vereinigungsmengenaxiom $\forall \mathscr{A}\, \exists B$:

$$\forall z[z \in B \Leftrightarrow \exists A \in \mathscr{A}\ z \in A$$

(also $B = \bigcup \mathscr{A} = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} \mathscr{A} = \bigcup\{A : A \in \mathscr{A}\}$, die "Vereinigungsmenge" der "Mengenfamilie $\mathscr{A}$). Zum Beispiel für $\mathscr{A} = \{B, C\}$ haben wir $\bigcup \mathscr{A} = B \cup C$

Aussonderungsaxiom (Dies ist nicht ein einzelnes Axiom, sondern ein "Axiomenschema = eine Liste von Axiomen, die alle dieselbe Bauart aufweisen.) Für jede Formel $\varphi(x)$:

$$\forall A\, \exists B \qquad \forall z : [z \in B \Leftrightarrow z \in A \wedge \varphi(z)]$$

es wird also die "Existenz" der Menge $\{z : z \in A \wedge \varphi(z)\}$ gefordert. φ darf auch von anderen Variablen ("Parametern") abhängen, also sollte man genauer schreiben:
Für alle Formeln $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$: $\forall p_1 \cdots \forall p_n\ \forall A\, \exists B$:

$$\forall z[z \in B \Leftrightarrow z \in A \wedge \varphi(z, p_1, \ldots, p_n)$$

Hier erlauben wir "...", weil erstens diese Punkte nicht in der "Objektebene" sondern in der "Metaebene" vorkommen, also nicht in den Formeln selbst, und weil wir zweitens sowieso in diesem Semester nur gewisse endlich viele Instanzen dieses Schemas brauchen werden.
Der Sinn der Axiome liegt auch darin, eine "akzeptable" Liste von Forderungen zu finden, die wir an unsere Mengen stellen, und in der obigen prägnaten Formulierung ist dieses Axiomemschema sicherlich akzeptabler, als es eine Liste einigen hundert oder tausend Instanzen wäre.

Anmerkung: Im Falle des Aussonderungsaxioms könnte man die Axiomenliste eigentlich mit etwas Geschick auf endlich viele reduzieren. Beim Ersetzungsaxiom geht das aber schon nicht mehr.

Regularitätsaxiom $\forall A : A = \emptyset\ \vee\ \exists b \in \mathscr{A}\ \forall c \in A : c \notin b$, oder:
$\forall A : A = \emptyset\ \vee\ \exists b \in \mathscr{A}\ b \cap A = \emptyset$
Dieses Axiom schließt unter anderem Mengen x aus, die $x \in x$ erfüllen.

Potenzmengenaxiom Zu jeder Menge A gibt es die "Potenzmenge" $\mathscr{P}(A)$, also eine Menge, die [genau] alle Teilmengen von A enthält:

$$\forall A\, \exists P : \forall z[z \in P \Leftrightarrow z \subseteq A]$$

(Dies ist wieder eine Instanz des Komprehensionsprinzips.)
Die schwache Form des Potenzmengenaxioms lautet:

$$\forall A\, \exists P : \forall z[z \subseteq A \Rightarrow z \in P]$$

Unendlichkeitsaxiom "Es gibt eine kleinste induktive Menge":

$$\exists A\, \forall x : x \in A \Leftrightarrow \forall B(B \text{ induktiv} \Rightarrow x \in B)$$

In der schwachen Form verlangen wir nur, dass es irgendeine induktive Menge gibt:

$$\exists A[0 \in A\ \wedge\ \forall x \in A : S(x) \in A]$$

Ersetzungsaxiom (Wieder ein Axiomenschema)
Für jede Formel $\varphi(x, y)$:

$$\forall A : [\forall x \in A\, \exists! y : \varphi(x, y)]\ \Rightarrow \exists B[\forall x \in A \exists y \in B : \varphi(x, y)]$$

D.h., wenn φ eine "funktionale Zuordnung" darstellt, dann gibt es zu jeder "Definitionsmenge" A eine "Wertemenge" B.
Hier darf φ auch "Parameter" enthalten, z.B. mit einem zusätzlichen Parameter wäre $\varphi = \varphi(x, y, z)$, dann lautet dieses Axiom eigentlich:

$$\forall p\ \forall A : [\forall x \in A\, \exists! y : \varphi(x, y, p)]\ \Rightarrow \exists B[\forall x \in A \exists y \in B : \varphi(x, y, p)]$$

Auswahlaxiom

$$\forall X \exists f : \mathscr{P}(X) \to X\ [\forall Y(Y \subseteq X\ \wedge\ Y \neq \emptyset \Rightarrow f(Y) \in Y)]$$

Literatur

Halmos, **Naive Set Theory.** Sehr populär, leicht zu lesen. Erklärt aber nicht die Beziehung zwischen Axiomen und Modellen). $\exists$ deutsche Übersetzung.

Drake+Singh, **Intermediate Set Theory, 1.Hälfte.** Sehr empfehlenswert, gut lesbar.

Just+Weese, **Discovering modern set theory, vol 1.** Relativ neu. Im "Plauderton" geschrieben. Sehr empfehlenswert, enthält mehr Stoff als die 2-stündige Vorlesung ML1+ML2.

Kunen, **Set Theory: Introduction to Independence Proofs.** Einleitung und Kapitel 1 enthalten bereits mehr Stoff als ML1+ML2. Gefällt mit sehr. Etwas zu knapp für Anfänger.

Levy, **Basic Set theory.** Ein recht dickes Buch, enthält auch mehr als den Stoff der Vorlesung. (Fraenkel-Levy-Bar Hillel, "Foundations of Set Theory", enthält philosophischen Hintergrund.)

Devlin, **The Joy of Sets.**

Moschovakis, **Notes on Set Theory.**

Roitman, **Introduction to Modern Set Theory.**