Martin Goldstern, Oktober 2023

f und f^{-1}

Die Notation $f(x)$, $f(M)$, f^{-1} etc macht oft Schwierigkeiten oder verwirrt. Sie finden die relevanten Definitionen im Eima-Skriptum unter Punkt 2.4.7.
In den folgenden Erklärungen, bemühe ich mich, verschiedene — aber leider gleich benannte — Konzepte durch die Verwendung von Farben[1] auseinander zu halten. (Ich empfehle daher, diesen Text nicht mit einem Schwarzweiß-Drucker zu drucken. Außerdem geht beim Ausdrucken das Link verloren.)

Wenn $\boldsymbol{f} : A \to B$ eine Funktion ist, dann „induziert" $\boldsymbol{f}$ auch Funktionen zwischen den Potenzmengen $\mathscr{P}(A)$ und $\mathscr{P}(B)$, das heißt: es werden durch $\boldsymbol{f}$ automatisch weitere Funktionen definiert, nämlich:

- eine Funktion von $\mathscr{P}(A)$ nach $\mathscr{P}(B)$, die üblicherweise auch $\boldsymbol{f}$ heißt, wird so definiert:
  $$\forall X \subseteq A : \boldsymbol{f}(X) = \{y \in B \mid \exists x \in X : \boldsymbol{f}(x) = y\}$$
  Daher gilt $y \in \boldsymbol{f}(X)$ genau dann, wenn y von einem $x \in X$ mit $\boldsymbol{f}$ getroffen wird.
  Der Deutlichkeit halber schreibt man manchmal auch $\boldsymbol{f}[X]$ statt $\boldsymbol{f}(X)$, oder auch $\boldsymbol{f}$“X.
  Diese Menge heißt auch „$\boldsymbol{f}$-Bild von X“.

- eine Funktion von $\mathscr{P}(B)$ nach $\mathscr{P}(A)$, die üblicherweise $\boldsymbol{f}^{-1}$ heißt, und die durch
  $$\forall Y \subseteq B : \boldsymbol{f}^{-1}(Y) = \{x \mid f(x) \in Y\}$$
  definiert ist. Man nennt $\boldsymbol{f}^{-1}(Y)$ oder $\boldsymbol{f}^{-1}[Y]$ auch das $\boldsymbol{f}$-Urbild von Y.
  Diese Funktion $\boldsymbol{f}^{-1}$ gibt es immer — egal ob f injektiv, surjektiv, bijektiv oder nichts davon ist.

- ACHTUNG! Wenn $\boldsymbol{f}$ bijektiv oder zumindest injektiv ist, dann gibt es eine weitere Funktion, die (leider) auch den Namen $\boldsymbol{f}^{-1}$ hat; diese Funktion geht von der Bildmenge $\boldsymbol{f}[A]$ (das ist $\subseteq B$, und wenn $\boldsymbol{f}$ auch surjektiv war dann sogar $= B$) in die Menge A und ist so definiert:
  $$\forall y \in \boldsymbol{f}[A] : \boldsymbol{f}^{-1}(y) = x \Leftrightarrow \boldsymbol{f}(x) = y \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{f}^{-1} := \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in \boldsymbol{f}\}.$$
  (Wir erinnern uns, dass $(x, y) \in \boldsymbol{f}$ dasselbe wir $\boldsymbol{f}(x) = y$ heißt.)
  Wenn $\boldsymbol{f}$ nicht injektiv war, kann man zwar auch $\boldsymbol{f}^{-1} := \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in \boldsymbol{f}\}$ definieren; die so erhaltene Relation, die eine Teilmenge von $B \times A$ ist, ist dann aber keine Funktion.

- Gelegentlich (wenn man keine Mengenklammern schreiben will) verwendet man die Notation f^{-1} auch für eine Funktion f^{-1}, die von B nach $\mathscr{P}(A)$ geht und so definiert ist:
  $$\forall y \in B : f^{-1}(y) := \{x \in A \mid f(x) = y\} = \boldsymbol{f}^{-1}(\{y\})$$
  Diese Menge $f^{-1}(y)$ heißt auch „Urbild von y“ oder „Urbild von $\{y\}$“.

Ein Beispiel: Sei $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, und sei $\boldsymbol{f} : \{1, 2\} \to \{3, 4\}$ durch $\boldsymbol{f}(1) = \boldsymbol{f}(2) = 3$ definiert. Die folgenden Wertetabellen beschreiben $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f}^{-1}$ und f^{-1}. (Da $\boldsymbol{f}$ nicht injektiv ist, gibt es keine Funktion $\boldsymbol{f}^{-1}$ von B nach A.)

x	$\boldsymbol{f}(x)$
1	3
2	3

X	$\boldsymbol{f}(X)$
$\{\}$	$\{\}$
$\{1\}$	$\{3\}$
$\{2\}$	$\{3\}$
$\{1,2\}$	$\{3,3\} = \{3\}$

Y	$\boldsymbol{f}^{-1}(Y)$
$\{\}$	$\{\}$
$\{3\}$	$\{1,2\}$
$\{4\}$	$\{\}$
$\{3,4\}$	$\{1,2\}$

y	$f^{-1}(y)$
3	$\{1,2\}$
4	$\{\}$

[1] Have you seen her dressed in blue?