



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

DIPLOMARBEIT

# Verteilung der Komponentengrößen von zerlegbaren kombinatorischen Strukturen

zur Erlangung des akademischen Grades

**Diplom-Ingenieurin**

im Rahmen des Studiums

**Technische Mathematik**

eingereicht von

**Lisa Mayer BSc**

Matrikelnummer 00626413

ausgeführt am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie  
der Fakultät für Mathematik und Geoinformation der Technischen Universität Wien

Betreuung

Betreuer: Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr. Bernhard Gittenberger

Wien, 17.12.2018

---

(Unterschrift Verfasserin)

---

(Unterschrift Betreuer)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Analytische Methoden</b>	<b>2</b>
2.1	Erzeugende Funktionen . . . . .	2
2.2	Singularitätsanalyse . . . . .	5
2.3	Sattelpunktmethoden . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Konstruktionen</b>	<b>12</b>
3.1	Das exp-log Schema . . . . .	12
3.1.1	Markierte Konstruktionen . . . . .	12
3.1.2	Unmarkierte Konstruktionen . . . . .	13
3.2	Beispiele für alg-log Strukturen . . . . .	14
3.3	Zusammengesetzte alg-log Funktionen . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Untersuchungen der größten Komponenten</b>	<b>18</b>
4.1	Größe Komponenten von exp-log Konstruktionen . . . . .	18
4.2	Größe Komponenten von alg-log Konstruktionen . . . . .	25
4.2.1	Subkritische Strukturen . . . . .	26
4.2.2	Kritische Strukturen . . . . .	31
4.2.3	Superkritische Strukturen . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Untersuchungen der kleinsten Komponenten</b>	<b>36</b>
5.1	Kleinste Komponenten von exp-log Funktionen . . . . .	36
5.2	Kleinste Komponenten von exp(alg-log) Funktionen . . . . .	42
5.3	Glatte superkritische Strukturen . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Untersuchungen über die Anzahl der Komponenten</b>	<b>53</b>
6.1	Anzahl der Komponenten von exp-log Funktionen . . . . .	55
6.2	Anzahl der Komponenten von zusammengesetzten alg-log Funktionen . . . . .	58
6.2.1	Subkritische Funktionen . . . . .	58
6.2.2	Kritische Funktionen . . . . .	59
6.2.3	Superkritische Funktionen . . . . .	62
6.3	Zusammenfassung der Ergebnisse des ersten Teils . . . . .	64
<b>7</b>	<b>Untersuchungen des Komponentenspektrums: Ansatz</b>	<b>65</b>
7.1	Konstruktionen . . . . .	66
7.2	Eine Rekursion für Summen Poisson-verteilter Zufallsvariablen . . . . .	68
7.3	Die Steinsche Methode für Poisson-verteilte Zufallsvariablen . . . . .	69
<b>8</b>	<b>Untersuchungen des Komponentenspektrums: Ergebnisse</b>	<b>74</b>
8.1	Logarithmische Strukturen . . . . .	74
8.2	Etwas genauere Ergebnisse für logarithmische Strukturen . . . . .	81
8.2.1	Abschätzungen des Verhaltens des summierten Komponentenvektors . . . . .	84
8.2.2	Einige Ergebnisse . . . . .	87
8.3	Konvergente Strukturen . . . . .	91
8.4	Divergente Strukturen . . . . .	95
8.5	Zusammenfassung . . . . .	102

# 1 Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit wird sein, einen Überblick über das Verhalten der Komponentengrößen von kombinatorischen Strukturen, die aus kleineren Teilblöcken zusammengesetzt sind, zu geben. Es gibt sehr viele Arbeiten, die sich mit speziellen Konstruktionen, beispielsweise Zahlenpartitionen befassen. Ich werde diese hier allerdings vernachlässigen und stattdessen die Ergebnisse und Ansätze vorstellen, die sich mit bestimmten Klassen von Strukturen ergeben. Viele kombinatorischen Objekte fallen natürlich in keine der betrachteten Klassen.

Der erste Teil beschäftigt sich mit Strukturen, die durch eine algebraisch-logarithmische erzeugende Funktion beschrieben werden können. Aus den Verteilungen der größten und kleinsten Komponente und der Verteilung der Anzahl der Komponenten lässt sich eine ungefähre Idee der Verteilung der Komponentengrößen erhalten. Die dabei verwendeten Methoden beruhen auf der Bestimmung der Koeffizienten von erzeugenden Funktionen.

Der zweite Teil wird sich mit dem Ansatz beschäftigen, direkt die Verteilung der Komponentengrößen zu betrachten. Die Idee ist üblicherweise, das Verhalten der Komponentengrößen von Strukturen einer bestimmten Größe  $n$  zu betrachten, wenn Strukturen jeder Größe durch eine Folge unabhängiger, Poisson-verteilter Zufallsvariablen erzeugt werden.

Beiden Ansätzen ist gemeinsam, dass es eine Eigenschaft gibt, durch die die Verteilung der Komponentengrößen stark beeinflusst wird. Es gibt in beiden Fällen einen Grenzwert für den Übergang von Strukturen mit einer einzigen sehr großen und wenigen sehr kleinen Komponenten zu Strukturen mit sehr vielen verhältnismäßig kleinen Komponenten. Im ersten Teil ist dies die Lage der Singularität der beteiligten erzeugenden Funktionen. Hier besitzen die subkritischen Strukturen eine einzige sehr große Komponente, während die superkritischen Strukturen aus sehr vielen kleinen Komponenten bestehen. Im Übergang liegen dann die kritischen Strukturen. Im zweiten Teil ergibt sich eine ähnliche Situation aus dem asymptotischen Verhalten der Erwartungswerte der Zufallsvariablen. Im konvergenten Fall gibt es eine riesige Komponente und im divergenten Fall viele kleine Komponenten, während der logarithmische Fall in der Mitte liegt.

## 2 Analytische Methoden

### 2.1 Erzeugende Funktionen

Die hier präsentierten Definitionen stammen aus dem Buch 'Analytic Combinatorics' [13].

Wir bezeichnen eine Menge  $\mathcal{A}$  als kombinatorische Klasse, wenn jedem  $a \in \mathcal{A}$  eine Größe  $|a| \in \mathbb{N}$  zugeordnet ist und  $A_n = |\{a \in \mathcal{A} : |a| = n\}| < \infty$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

**Definition 1.** Die gewöhnliche erzeugende Funktion einer kombinatorischen Klasse  $\mathcal{A}$  ist definiert durch

$$A(z) := \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$$

und wir schreiben

$$[z^n]A(z) := A_n.$$

**Definition 2.** Sind  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  kombinatorische Klassen mit  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \emptyset$  und betrachten wir

$\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ , so dass für ein Element  $c$  die Größe durch

$$|c| = \begin{cases} |c|_{\mathcal{A}} & \text{für } c \in \mathcal{A} \\ |c|_{\mathcal{B}} & \text{für } c \in \mathcal{B} \end{cases}$$

definiert ist, dann ist auch  $\mathcal{C}$  eine kombinatorische Klasse und für die erzeugende Funktion gilt

$$C(z) = A(z) + B(z).$$

**Definition 3.** Das kartesische Produkt  $\mathcal{C}$  zweier Klassen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  wird durch alle Paare  $\{(a, b) : a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$  gebildet, wobei die Größe von  $c = (a, b)$  durch

$$|c| = |a| + |b|$$

gegeben ist. In der Schreibweise der erzeugenden Funktionen entspricht das

$$C_n = \sum_{k=0}^n A_k B_{n-k}$$

und damit

$$C(z) = A(z)B(z)$$

Wir können viele Klassen von kombinatorischen Objekten durch eine Kombination von einfacheren Klassen von Objekten erhalten.

**Definition 4.** Ist  $\mathcal{A}$  eine Klasse von kombinatorischen Objekten, dann sind die Folgen von Objekten aus  $\mathcal{A}$  durch

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} + \mathcal{A} \times \mathcal{A} + \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} + \dots$$

gegeben. Die erzeugende Funktion entspricht dann

$$B(z) = \frac{1}{1 - A(z)}.$$

**Definition 5.** Die erzeugende Funktion der kombinatorischen Klasse  $\mathcal{C}$ , in der Atome von  $\mathcal{B}$  durch Elemente von  $\mathcal{C}$  ersetzt werden, wobei  $\mathcal{C}$  kein Element der Größe 0 besitzt, ist durch  $C(z) = B(A(z))$  gegeben

Wir betrachten nun eine kombinatorische Klasse  $\hat{\mathcal{A}}$ , so dass jedes  $a \in \hat{\mathcal{A}}$  mit Größe  $n$  mit einer Anordnung der Zahlen  $1, \dots, n$  verbunden werden und Objekte, die sich durch Permutation von  $1, \dots, n$  ergeben, unterschieden werden. In diesem Fall verwenden wir die exponentielle erzeugende Funktion. In diesem Abschnitt schreiben wir markierte Objekte in der Form  $\hat{\mathcal{A}}$ , wir werden diese Notation allerdings nicht allgemein beibehalten.

**Definition 6.** Die exponentielle erzeugende Funktion einer Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist die Funktion

$$\hat{A}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n!} z^n$$

Ist  $\hat{\mathcal{A}}$  eine Familie von markierten kombinatorischen Objekten und ist

$$A_n = \{x \in \hat{\mathcal{A}} : |x| = n\},$$

dann ist  $\hat{A}$  die exponentielle erzeugende Funktion von  $\hat{\mathcal{A}}$

Für die Vereinigung von zwei disjunkten Klassen von markierten Objekten gilt dasselbe wie für unmarkierte Objekte und auch das kartesische Produkt lässt sich als Produkt von erzeugenden Funktionen schreiben.

**Definition 7.** Wird für zwei Klassen von markierten Objekten  $\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}$  das kartesische Produkt  $\hat{\mathcal{C}} = \hat{\mathcal{A}} \times \hat{\mathcal{B}}$  gebildet, wobei jedem Element eine Permutation von  $1 \dots |a|$  beziehungsweise  $1 \dots |b|$  zugeordnet ist, dann muss jedem  $c = (a, b)$  eine Permutation von  $1 \dots |a| + |b|$  zugeordnet werden. Wir betrachten alle Umordnungen der Permutationen die die Ordnung erhalten. Dies entspricht der Anzahl aller Zerlegungen der Menge  $\{1, \dots, |a| + |b|\}$  in zwei Mengen der Größe  $|a|$  und  $|b|$  und wir erhalten

$$C_n = \frac{n!}{k!(n-k)!} A_k B_{n-k}$$

Das entspricht genau der Darstellung der exponentiellen erzeugenden Funktion von  $\mathcal{C}$  als Produkt  $\hat{C}(z) = \hat{A}(z)\hat{B}(z)$ .

Wir betrachten nun kombinatorische Objekte mit einer weiteren Eigenschaft  $\zeta$  und schreiben

$$A_{n,k} := |\{x \in \mathcal{C} : |x| = n, |\zeta(x)| = k\}|.$$

**Definition 8.** Die bivariate erzeugende Funktion ist definiert durch

$$A(z, u) := \sum_{n,k=0}^{\infty} A_{n,k} z^n u^k,$$

für markierte Objekte ergibt sich

$$\hat{A}(z, u) := \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{A_{n,k}}{n!} z^n u^k.$$

Addition und Multiplikation funktionieren ebenso wie erzeugende Funktionen mit nur einem Parameter. Ist  $A(z, u)$  die bivariate erzeugende Funktion einer Klasse von Strukturen mit Parameter  $\zeta$ , dann ergibt  $A(z, 1)$  genau die erzeugende Funktion ohne zweiten Parameter.

**Definition 9.** Für eine diskrete Zufallsvariable  $X$  ist der Erwartungswert einer Funktion  $f$  durch

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_i \Pr(X = i) f(i)$$

definiert. Das  $r$ -te Moment ist

$$\mathbb{E}(X^r) = \sum_i \Pr(X = i) i^r$$

und das  $r$ -te faktorielle Moment einer Zufallsvariable  $X$  ist

$$\mathbb{E}(X(X-1) \cdots (X-r+1)).$$

**Lemma 1.** Ist  $A(z, u)$  die bivariate erzeugende Funktion einer Klasse von kombinatorischen Objekten und bezeichnen wir mit  $\mathcal{A}_n$  die Objekte der Größe  $n$ , dann ist der Wert von  $\zeta$  eine Zufallsvariable und es gilt für das  $r$ -te faktorielle Moment von  $\mathcal{A}_n$

$$\mathbb{E}_{\mathcal{A}_n}(\zeta(\zeta + 1) \cdots (\zeta + r - 1)) = \frac{[z^n] \partial^r / \partial u^r (A(z, u))|_{u=1}}{[z^n] A(z, 1)}.$$

Insbesondere gilt für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}_{\mathcal{A}_n}(\zeta) = \frac{[z^n] \partial / \partial u A(z, u)|_{u=1}}{[z^n] A(z, 1)}.$$

Die Definitionen von erzeugenden Funktionen sind rein formal und für eine Klasse von kombinatorischen Objekten muss die Funktion  $A(z)$  für  $|z| > 0$  nicht existieren. Wenn sie in einer Umgebung von 0 existiert, ist die erzeugende Funktion als Potenzreihe auch automatisch analytisch. Wir werden ausschließlich Konstruktionen betrachten, die in einer Umgebung von 0 analytisch sind.

## 2.2 Singularitätsanalyse

Wir wollen für eine erzeugende Funktion  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$  die Koeffizienten  $[z^n] f(z) := f_n$  bestimmen. Die hier verwendete Methode stammt von Flajolet und Odlyzko [11] und ergibt das asymptotische Verhalten für die Koeffizienten einer Klasse von erzeugenden Funktionen. Wir werden diese Art von Argumentation in der gesamten Arbeit immer wieder verwenden.

**Definition 10.** Ist  $U \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und ist eine Funktion  $f(z)$  in  $U \setminus z_0$  analytisch, dann bezeichnen wir  $z_0$  als isolierte Singularität.

**Definition 11.** Eine Singularität an  $z_0$  ist eine Polstelle der Ordnung  $k > 0$ , wenn  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z) = 0$ , aber  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) \neq 0$

**Satz 2.1.** Ist  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $U$  eine Umgebung von  $z_0$ , dann hat jede in  $U \setminus z_0$  analytische Funktion  $f(z)$  eine Darstellung der Form

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z - z_0)^k$$

Wir nennen  $a_{-1} =: \text{Res}(f(z_0))$  das Residuum.

Die Koeffizienten einer analytischen Funktion lassen sich bekanntlich durch die Cauchy'sche Integralformel bestimmen, siehe beispielsweise [22].

**Satz 2.2 (Cauchy).** Ist  $f$  eine in einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $U$  analytische Funktion und  $\gamma$  ein geschlossener Weg in  $U$ , der  $z_0 \in U$  gegen den Uhrzeigersinn umläuft, dann gilt

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} d\gamma$$

Der folgende Ansatz benötigt Funktionen, die genau eine Singularität am Rand ihres Konvergenzgebietes haben. Die Idee ist, die Koeffizienten auf das Verhalten der Funktion in der Nähe der Singularität zurückzuführen.

**Definition 12.** Für  $0 < \phi < \pi/2$ ,  $\rho \neq 0$  und  $R > |\rho|$  heißt ein Gebiet der Form

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R, \operatorname{Arg}(z - \rho) \geq \phi\}$$

$\Delta_{R,\phi,\rho}$ -Bereich, oder auch nur  $\Delta$ -Bereich.

**Definition 13.** Eine Funktion  $f(z)$  heißt algebraisch-logarithmisch, wenn sie in einem  $\Delta_{R,\phi,\rho}$ -Bereich analytisch ist und es  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  gibt, so dass für  $z \rightarrow \rho$  die Funktion

$$f(z) = \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^\alpha \left(\log \frac{1}{1 - z/\rho}\right)^\beta (1 + o(1))$$

erfüllt.

**Definition 14.** Wir werden zwei Arten von Hankel-Konturen verwenden,

$$\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg}(z + 1)| = \phi\}$$

mit  $\phi < \pi/2$  bzw

$$\mathcal{H}' := \{z : |z| = 1, \Re(z) \leq 1; z = x \pm i, \Re(z) \geq 0\}.$$

Wir benötigen diese wegen der folgenden Integraldarstellung der Gamma-Funktion:

**Satz 2.3.** Sei  $\gamma$  ein Weg, der von  $+\infty$  auf der unteren Halbebene entgegen dem Uhrzeigersinn um den Nullpunkt nach  $+\infty$  auf der oberen Halbebene verläuft, dann gilt für jedes  $s \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \int_\gamma t^{-s} e^{-t} dt.$$

Im Folgenden werden wir nur Funktionen mit einer Singularität an 1 betrachten, weil wir davon leicht auf allgemeine algebraisch-logarithmische Funktionen schließen können. Ist  $f(z)$  analytisch für  $|z| < |\zeta|$  und hat eine isolierte Singularität an  $\zeta$ , dann ist die Funktion  $g(z) = f\left(\frac{z}{\zeta}\right)$  analytisch für  $|z| < 1$  mit einer Singularität bei 1. Es gilt  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{\zeta^n} z^n = g(z)$  und damit

$$[z^n]g(z) = \zeta^{-n} [z^n]f(z).$$

Wir bestimmen nun die Koeffizienten von algebraisch-logarithmischen Funktionen.

**Satz 2.4.** Für  $\alpha, \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{N}\}$  und

$$f(z) = (1 - z)^\alpha \left(\frac{1}{z} \log \frac{1}{1 - z}\right)^\gamma$$

erfüllen die Koeffizienten  $f_n = [z^n]f(z)$

$$f_n = \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} (\log n)^\gamma \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{(\log n)^k}\right)$$

mit

$$p_k := (-1)^k \binom{\gamma}{k} \Gamma(-\alpha) \frac{\partial^k}{\partial s^k} \left(\frac{1}{\Gamma(s)}\right) \Big|_{s=\alpha}.$$

*Beweis.* Die Funktion  $f(z)$  ist auf ganz  $\mathbb{C} \setminus [1, \infty]$  analytisch. Wir können daher die Cauchysche Integralformel auf dem folgenden Weg

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$$

mit

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \left\{ z : z = 1 - \frac{t}{n}, t = e^{i\phi}, \phi \in [-\pi/2, \pi/2] \right\} \\ \gamma_2 &= \left\{ z : z = 1 + \frac{t+i}{n}, t \in [0, n] \right\} \\ \gamma_3 &= \left\{ z : |z|^2 = \left(4 + \frac{1}{n^2}\right), \Re(z) \leq 2 \right\} \\ \gamma_4 &= \left\{ z : z = 1 + \frac{t-i}{n}, t \in [0, n] \right\} \end{aligned}$$

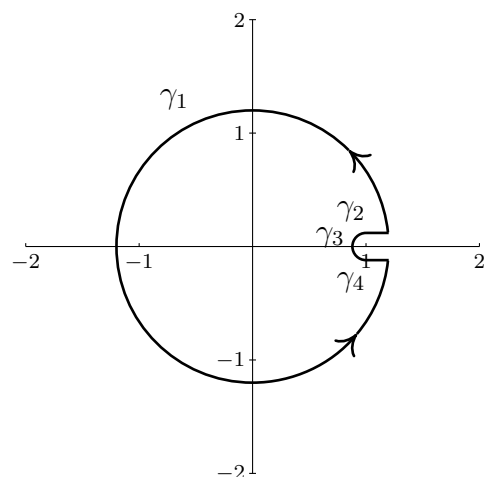
anwenden. Die Koeffizienten haben die Form

$$[z^n]f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

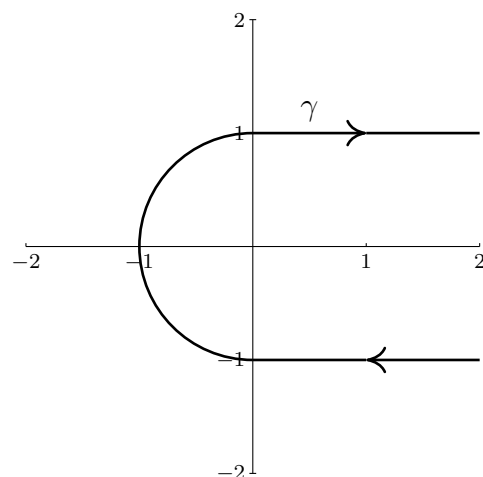
Das Integral über  $\gamma_3$  lässt sich durch  $O(2^{-n})$  abschätzen und ist daher vernachlässigbar. Auf dem verbleibenden Integrationspfad  $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_4$  führen wir eine Substitution mit  $z = 1 + \frac{t}{n}$  durch. Damit ergibt sich

$$[z^n]f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}'} (-t)^\alpha \left( \log \left( -\frac{n}{t} \right) \right)^\gamma \left( 1 + \frac{t}{n} \right)^{-n-1-\gamma} \frac{1}{n^{\alpha+1}} dt.$$

Der Integrationspfad  $\gamma$  hat also vor und nach der Substitution die folgende Form:



Integrationspfad



Hankelkontur

Wir trennen nun die Kontur an  $|t| = \log^2 n$ . Der Teil mit  $|t| > \log^2 n$  kann wegen dem Faktor  $(1 + t/n)^{-n}$  vernachlässigt werden. Auf dem restlichen Pfad  $\mathcal{H}_1$  können wir  $(1 + t/n)^{-n}$  durch  $e^{-t}$  abschätzen und erhalten

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \left( \int_{\mathcal{H}_1} (-t)^\alpha \left( \log \left( -\frac{n}{t} \right) \right)^\gamma e^{-t} dt + O(\log^\gamma n/n) \right).$$



Auseinanderziehen des Logarithmus und Taylorentwicklung ergibt

$$\begin{aligned} \left(\log\left(-\frac{n}{t}\right)\right)^\gamma &= \log^\gamma n \left(1 - \frac{\log(-t)}{\log n}\right)^\gamma \\ &= \log^\gamma n \left(\sum_{k=0}^j \binom{\gamma}{k} \left(\frac{-\log(-t)}{\log n}\right)^k + O\left(\left(\frac{\log(-t)}{\log n}\right)^{j+1}\right)\right). \end{aligned}$$

Setzt man diesen Ausdruck nun in das vorige Integral ein, erhält man

$$\frac{\log^\gamma n}{n^{\alpha+1}} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \binom{\gamma}{k} \frac{(-1)^k}{(\log n)^k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}_1} (-t)^\alpha (\log(-t))^k e^{-t} dt + O(\log^\gamma n/n)\right).$$

Wegen dem Faktor  $e^{-t}$  ist der Fehler bei Verlängerung des Integralspfads gegen  $\infty$  vernachlässigbar. Die Behauptung ergibt sich dann aus

$$\frac{\partial^k}{\partial \alpha^k} \int_{\mathcal{H}'} (-t)^\alpha e^{-t} dt = \int_{\mathcal{H}'} (-t)^\alpha \log(-t)^k e^{-t} dt$$

und der Darstellung der Gammafunktion als Hankel-Kontur. □

**Satz 2.5.** *Es sei  $f(z)$  in einem  $\Delta_{1+\eta, \phi, 1}$  Gebiet analytisch, so dass für  $z \rightarrow 1$*

$$f(z) = O\left((1-z)^\alpha \log^\gamma\left(\frac{1}{1-z}\right) \log^\delta \log\left(\frac{1}{1-z}\right)\right)$$

mit  $\alpha, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  gilt. Dann erfüllen die Koeffizienten von  $f$  asymptotisch

$$f_n = O\left(n^{-\alpha-1} \log^\gamma n \log^\delta \log n\right).$$

Erfüllt  $f(z)$  für  $z \rightarrow 1$

$$f(z) = o\left((1-z)^\alpha \log^\gamma\left(\frac{1}{1-z}\right) \log^\delta \log\left(\frac{1}{1-z}\right)\right),$$

dann erfüllen die Koeffizienten von  $f(z)$  asymptotisch

$$f_n = o\left(n^{-\alpha-1} \log^\gamma n \log^\delta \log n\right).$$

*Beweis.* Die Integration erfolgt über den Pfad

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$$

mit

$$\begin{aligned} \gamma_1 &:= \left\{z : |z-1| = \frac{1}{n}, |\operatorname{Arg}(z-1)| \geq \phi\right\} \\ \gamma_2 &:= \left\{z : \frac{1}{n} \leq |z-1|, |z| \leq 1+\eta, \operatorname{Arg}(z-1) = \phi\right\} \\ \gamma_3 &:= \{z : |z-1| = 1+\eta, |\operatorname{Arg}(z-1)| \geq \phi\} \\ \gamma_4 &:= \left\{z : \frac{1}{n} \leq |z-1|, |z| \leq 1+\eta, \operatorname{Arg}(z-1) = -\phi\right\} \end{aligned}$$

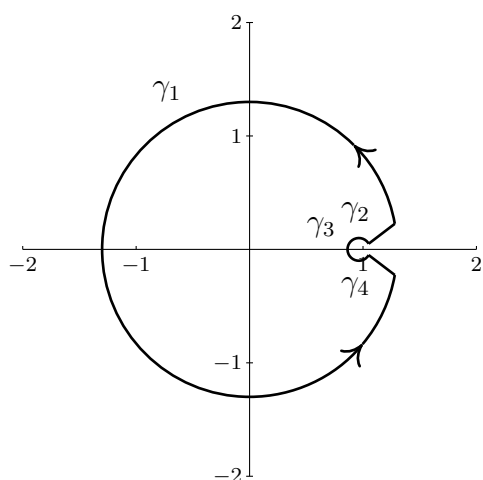
und wir wollen

$$I = \int_{\gamma} \left| f(z) \frac{1}{z^{n+1}} \right| |dz|$$

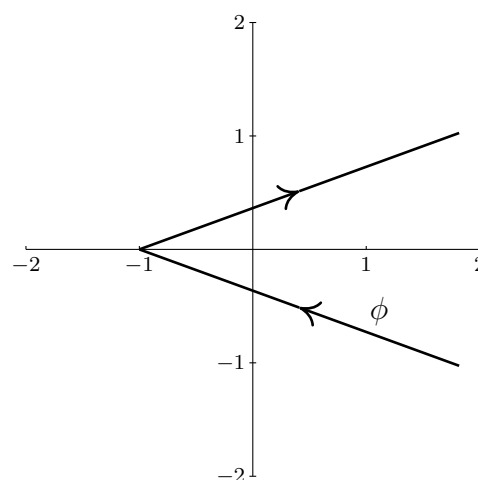
abschätzen. Das Integral über den äußeren Kreis ist wie beim vorigen Beweis vernachlässigbar. Auf  $\gamma_2$  und  $\gamma_4$  betrachten wir die Substitution  $z = 1 + \frac{\omega t}{n}$  mit  $\omega = e^{i\phi}$  bzw.  $\omega = e^{-i\phi}$ . Dann haben wir für den Integrationspfad über  $\gamma_2$  oder analog  $\gamma_4$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} f(z) \frac{1}{z^{n+1}} dz = \int_1^E f\left(1 + \frac{\omega t}{n}\right) \left(1 + \frac{\omega t}{n}\right)^{-n-1} dt$$

mit  $E = n\eta$ . Die Integrationspfade vor und nach der Substitution haben also die folgende Form:



Integrationspfad



Hankelkontur

Wir können nun wieder das Integral an  $t = \log^2 n$  in  $I_2 = I'_2 + I''_2$  aufteilen und erhalten

$$I'_2 = \int_1^{\log^2 n} = O\left(M(n) \int_1^{\log^2 n} \frac{t^\alpha}{n^{\alpha+1}} \left(1 + \frac{\omega t}{n}\right)^{-n-1} dt\right)$$

mit

$$M(n) = \sup_{1 \leq t \leq \log^2 n} \left( \log\left(\frac{n}{-\omega t}\right)^\gamma \log^\delta \log\left(\frac{n}{-\omega t}\right) \right).$$

$M(n)$  erfüllt für  $n \rightarrow \infty$  die Darstellung  $(\log n)^\gamma \log^\delta(\log(n))$ , nachdem  $t$  im Verhältnis zu  $n$  klein ist. Wegen

$$\left|1 + \frac{\omega t}{n}\right| \geq 1 + \frac{t}{n} \cos \phi$$

ergibt sich

$$I'_2 = O\left(M(n) \int_1^{\log^2 n} \frac{t^\alpha}{n^{\alpha+1}} \left(1 + \frac{t \cos \phi}{n}\right)^{-n} dt\right) = O\left(M(n) \int_1^{\log^2 n} \frac{t^\alpha}{n^{\alpha+1}} e^{-t \cos \phi} dt\right).$$

Der Fehler bei der Änderung der Integralgrenzen auf  $t \in (1, \infty)$  ist ebenso wie im vorigen Beweis für ausreichend großes  $n$  zu vernachlässigen und damit erhalten wir, weil das

Integral beschränkt ist,

$$I_2' = O\left(M(n) \int_1^\infty \frac{t^\alpha}{n^{\alpha+1}} e^{-t \cos \phi} dt\right) = O\left(n^{-\alpha-1} (\log^\gamma n) (\log^\delta \log n)\right).$$

Wir erhalten mit  $L(z) := \log(z)^\gamma \log^\delta \log(z)$  ein Integral der Form

$$I_2'' = \int_{\log^2 n}^E \leq \frac{K}{2\pi} \int_{\log^2 n}^E \frac{t^\alpha}{n^{\alpha+1}} \left|L\left(-\frac{n}{\omega t}\right)\right| \left(1 + \frac{t \cos \phi}{n}\right)^{-n} dt.$$

Der Logarithmus lässt sich durch eine lineare Funktion abschätzen, erfüllt also eine Abschätzung der Form  $O(n)$ , weiters ist  $t$  durch  $\log^2 n$  nach unten beschränkt, damit gilt  $(1 + t \cos(\phi/n))^{-n} < \exp(-\cos(\phi/2) \log^2 n)$ , also beispielsweise  $O(n^{-4})$  und damit erhalten wir

$$I_2 = O(n^{-\alpha-3}).$$

Insgesamt haben wir damit die erste Behauptung gezeigt. Der zweite Teil ist ähnlich zu zeigen. □

**Satz 2.6.** *Ist  $f(z)$  in einem  $\Delta_{1+\eta, \phi, 1}$ -Gebiet analytisch und erfüllt für  $z \rightarrow 1$*

$$f(z) = (1-z)^\alpha \left( \log^\gamma \left( \frac{1}{1-z} \right) + O\left( \log^{\gamma-1} \left( \frac{1}{1-z} \right) \right) \right)$$

mit  $\alpha, \gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ , dann erfüllen die Koeffizienten von  $f$  asymptotisch

$$f_n = \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \log^\gamma n \left( 1 + O\left( \log \frac{1}{n} \right) \right)$$

*Beweis.* Das Ergebnis für die Funktion

$$g(z) = \frac{1}{z} (1-z)^\alpha \log^\gamma \frac{1}{1-z}$$

ist bereits bekannt und wir können den ersten Teil von  $f(z)$  in der Form

$$f(z) = \frac{1}{z} (1-z)^\alpha \log^\gamma \left( \frac{1}{1-z} \right) + \frac{1-z}{z} (1-z)^\alpha \log^\gamma \left( \frac{1}{1-z} \right)$$

darstellen und damit erhalten wir das Ergebnis. Diese Formel gilt auch noch, wenn  $\gamma$  eine ganze Zahl ist. □

## 2.3 Sattelpunktmethoden

Die Darstellung aus diesem Abschnitt ist dem Buch von Flajolet und Sedgewick [13] entnommen. Wir betrachten wieder ein Integral, um die asymptotische Darstellung der Koeffizienten einer erzeugenden Funktion zu bestimmen. Die Idee ist, den Integrationsweg so zu wählen, dass er durch einen Sattelpunkt verläuft. Es wird dann versucht, die Funktion in einer Umgebung um den Sattelpunkt am Integrationsweg durch die Dichte einer Normalverteilung zu approximieren. Das bietet sich an, weil an einem Sattelpunkt die erste Ableitung verschwindet.

Wir betrachten also eine Funktionenfolge  $F_n(z)$ , die sich als

$$F_n(z) = e^{f_n(z)}$$

darstellen lässt. Ein Punkt  $z_0$  ist dann ein Sattelpunkt von  $F_n(z)$ , wenn  $f'_n(z_0) = 0$  erfüllt ist. Wir wollen das Integral  $\int_A^B F_n(z) dz$  berechnen und setzen einen Weg  $\gamma$  mit  $A, B \in \gamma$  voraus, der durch einen Sattelpunkt von  $f(z)$  verläuft. Das ist möglich, wenn wir  $\gamma$  als Vereinigung disjunkter Wege  $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1$  schreiben können, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Das Integral über  $\gamma_1$  ist im Vergleich zum Gesamtintegral vernachlässigbar, es gilt also

$$\int_{\gamma_1} F_n(z) = o\left(\int_{\gamma} F_n(z) dz\right).$$

- Das Integral auf  $\gamma_0$  lässt sich als unvollständiges Gaußsches Integral darstellen, das heißt, dass  $f_n$  auf  $\gamma_0$  die Darstellung

$$f_n(z) = f_n(\zeta) + \frac{1}{2}(z - \zeta)^2 f''(\zeta) + O(\eta)$$

besitzt, wobei  $\eta(n)$  ausreichend klein, also  $o(z - \zeta)^2$  ist. Damit lässt sich das Integral über  $\gamma_0$  als

$$\int_{\gamma_0} e^{f_n(z)} d\gamma_0 = e^{f_n(\zeta)} \int_{\gamma_0} e^{\frac{1}{2}(z-\zeta)^2 f''(\zeta)} e^\eta d\gamma_0$$

darstellen.

- Wird das Gaußsche Integral vervollständigt, so ist der Fehler dabei vernachlässigbar, es gilt also bei Substitution durch  $x = ie^{-i\phi/2}(z - \zeta)$  (hier ist  $\phi$  so gewählt, dass  $f''$  durch den Betrag ersetzt werden kann)

$$\int_{\gamma_0} e^{\frac{1}{2}f''(\zeta)(z-\zeta)^2} dz \sim ie^{-i\phi/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|f''(\zeta)|\frac{x^2}{2}} dx.$$

Dann gilt für das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_A^B e^{f_n(z)} \sim e^{i\phi/2} \frac{e^{f_n(\zeta)}}{\sqrt{2\pi|f''(\zeta)|}}.$$

Als nächstes betrachten wir erzeugende Funktionen, um die Koeffizienten zu bestimmen. Mit einem Weg  $\gamma$ , der gegen den Uhrzeigersinn um 0 verläuft, erhalten wir ein Integral der Form

$$F_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(z)}{z^{n+1}} dz$$

Sei der Integrationsweg ein Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius  $r$ . Wir erhalten dann durch die Substitution mit  $z = re^{i\phi}$

$$F_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} F(re^{i\phi}) r^{-n} e^{-in\phi} d\phi.$$

Betrachten wir nun

$$f(z) = \log F(z) - n \log z,$$

dann können wir ein reelles  $r$  so wählen, dass  $f'(r) = 0$ , also

$$\frac{F'(r)}{F(r)} - n \frac{1}{r} = 0$$

gilt. Wenn die Bedingungen von vorhin erfüllt sind, erhalten wir daraus das Verhalten des Integrals.

## 3 Konstruktionen

### 3.1 Das exp-log Schema

Eine komplexwertige Funktion  $A(z)$  heißt logarithmisch, wenn sie in einer  $\Delta$ -Umgebung analytisch ist und für  $z \rightarrow \rho$

$$A(z) = \log \left( \frac{1}{1 - z/\rho} \right) + o \left( \log \left( \frac{1}{1 - z/\rho} \right) \right)$$

erfüllt. Eine Funktion  $B(z)$  heißt vom exp-log Typ, wenn sie die Form  $B(z) = e^{A(z)}$  für eine logarithmische Funktion  $A(z)$  hat. Je nachdem, ob wir markierte oder unmarkierte Objekte betrachten, haben exp-log Konstruktionen üblicherweise eine der folgenden Formen.

#### 3.1.1 Markierte Konstruktionen

Die einfachste Konstruktion zur Erzeugung einer logarithmischen erzeugenden Funktion ist die Zyklen-Konstruktion, wenn die ursprüngliche erzeugende Funktion linear ist. Ein Zyklus der Länge  $n$  ist eine Folge von  $n$  Elementen, bei der es egal ist, mit welchem Element gestartet wird. Ist  $\mathcal{A}$  eine Klasse von kombinatorischen Objekten mit erzeugender Funktion  $A(z)$ , dann sind die Zyklen durch

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} + \frac{1}{2} \mathcal{A} \times \mathcal{A} + \frac{1}{3} \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} + \dots$$

gegeben. Die erzeugende Funktion hat dann die Form

$$B(z) = \log \left( \frac{1}{1 - A(z)} \right).$$

Um nun eine exp-log Funktion zu erhalten, betrachten wir Mengen von markierten Objekten. Dies entspricht Folgen von Objekten, bei denen die Reihenfolge keine Rolle spielt. Damit erhalten wir die Mengen  $\mathcal{B}$  einer Klasse von Objekten  $\mathcal{A}$  durch

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} + \frac{1}{2!} \mathcal{A} \times \mathcal{A} + \frac{1}{3!} \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} + \dots$$

mit Erzeugender Funktion  $B(z) = e^{A(z)}$ .

**Beispiel 1.** Die einfachste Konstruktion ist die Menge der Permutationen. Jede Permutation lässt sich als eine Menge von Zyklen schreiben. Damit erhalten wir

$$A(z) = \exp\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{1-z}$$

**Beispiel 2.** Ein weiteres einfaches Beispiel sind ungerichtete 2-reguläre Graphen: Das sind Graphen, bei denen jeder Knoten genau zwei Kanten besitzt. Um das zu erreichen müssen alle Elemente Zyklen der Länge mindestens 3 sein. Für markierte Zyklen  $\geq 3$ , die ungerichtet sind haben wir die erzeugende Funktion

$$A(z) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{1-z}\right) - \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}$$

und für  $z \rightarrow 1$  ist die Definition einer logarithmischen Funktion erfüllt. Nachdem wir hier wieder eine Menge von Elementen haben, ist die erzeugende Funktion

$$B(z) = e^{A(z)}$$

### 3.1.2 Unmarkierte Konstruktionen

Die üblichen unmarkierten Konstruktionen mit erzeugender Funktion vom exp-log Typ sind Mengen und Multimengen.

**Multimengen** sind Folgen von unmarkierten Elementen, in denen sich Elemente wiederholen können. Zwei Multimengen werden als gleich angesehen, wenn es eine Permutation der Elemente gibt, die sie ineinander überführt.

Für eine Multimenge können wir für jedes Element eine Folge dieses Elements betrachten. Die Erzeugende Funktion der Folgen eines einzigen Elements der Größe  $n$  lässt sich als  $(1-x^n)^{-1} = 1 + x^n + x^{2n} + \dots$  schreiben. Damit erhalten wir zunächst für eine Klasse  $\mathcal{A}$  mit Erzeugender Funktion  $A(z)$ , die nur endlich viele Elemente enthält, die erzeugende Funktion

$$B(z) = \prod_{n \in \mathbb{N}} (1 - z^n)^{-a_n}.$$

Durch Übergehen auf den Logarithmus ergibt sich

$$B(z) = \exp\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} -a_n \log(1 - z^n)\right)$$

und nach Umsummieren

$$B(z) = \exp\left(A(z) + \frac{A(z^2)}{2} + \frac{A(z^3)}{3} + \dots\right).$$

Diese Formel stimmt auch für erzeugende Funktionen  $\mathcal{A}$  mit unendlich vielen Elementen, weil eine Multimenge der Größe  $n$  nur aus kleineren Komponenten zusammengesetzt sein kann.

Für **Mengen von unmarkierten Objekten** erhalten wir für ein endliches  $\mathcal{A}$  mit erzeugender Funktion  $A(z)$  die Schreibweise

$$\mathcal{B} = \prod_{a \in \mathcal{A}} (\epsilon + a),$$

wobei  $\epsilon$  ein Element der Größe 0 ist. Die erzeugende Funktion hat dann die Form

$$B(z) = \prod_{n \in \mathbb{N}} (1 + x^n)^{a_n}$$

also auch

$$B(z) = \exp \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \log(1 + x^n) \right)$$

und durch Umordnen des Logarithmus erhalten wir

$$B(z) = \exp \left( A(z) - \frac{A(z^2)}{2} + \frac{A(z^3)}{3} - \dots \right).$$

Für  $\mathcal{A}$  mit unendlich vielen Elementen stimmt die Formel immer noch.

Wir betrachten Mengen und Multimengen-Konstruktionen von Strukturen mit einer logarithmischen Erzeugender Funktion  $A(z)$ . Wenn man annimmt, dass für den Konvergenzradius  $\rho$  von  $A(z)$   $\rho < 1$  gilt und  $A(0) = 0$  ist, dann ergibt sich

$$B(z) = \exp \left( A(z) + \frac{A(z^2)}{2} + \frac{A(z^3)}{3} + \dots \right) = \exp(A(z) + g(z))$$

und es ist klar, dass  $g(z) = A(z^2)/2 + A(z^3)/3 + \dots$  für  $|z| < \rho$  existiert und damit gibt es für  $B(z)$  eine Darstellung in exp-log Form.

**Beispiel 3.** Um ein unmarkiertes Beispiel zu geben, kann man Polynome über einem endlichen Körper  $\mathbb{F}_q$  der Größe  $q$  betrachten. Es gibt  $q^k$  normierte Polynome der Größe  $k$  in  $\mathbb{F}_q$ . Diese haben damit die erzeugende Funktion

$$\frac{1}{1 - qz}$$

und sind Multimengen von irreduziblen Polynomen. Betrachtet man nun mit  $\mathcal{I}$  die Klasse der normierte irreduziblen Polynome auf  $\mathbb{F}_q$ , dann ist es möglich, diese aus der Möbius-Inversion zu erhalten und erhält die erzeugende Funktion

$$I(z) = \log \frac{1}{1 - z} + R(z)$$

mit

$$R(z) = \sum_{k \geq 2} \frac{\mu(k)}{k} \log \frac{1}{1 - qz^k}.$$

Die Funktion  $R(z)$  ist in  $|z| < q^{-1/2}$  analytisch.

### 3.2 Beispiele für alg-log Strukturen

Folgen haben bekanntlich die erzeugende Funktion  $(1 - z)^{-1}$  und es gibt auch Konstruktionen mit erzeugender Funktion  $(1 - z)^{-k}$ . Durch implizite Gleichungen definierte erzeugende Funktionen sind üblicherweise auch von algebraischer Form. Wenn die erzeugende Funktion einer Klasse von Konstruktionen durch

$$A(z) = z\phi(A(z))$$

definiert ist und  $\phi$  zusätzlich noch die folgenden Bedingungen erfüllt, lässt sich eine algebraische Darstellung mit algebraischem Exponenten  $\frac{1}{2}$  zeigen:

- $\phi(u)$  ist analytisch an 0 und keine lineare Funktion und erfüllt

$$[u^n]\phi(u) \geq 0.$$

- Ist  $R$  der Konvergenzradius von  $\phi$ , dann gibt es in der offenen Kreisscheibe mit Radius  $R$  eine positive Lösung der Gleichung

$$\phi(\tau) - \tau\phi'(\tau) = 0.$$

**Satz 3.1.** Sei  $\phi$  eine Funktion, die obige Bedingungen erfüllt und sei  $y(z)$  eine Funktion, die  $y = z\phi(y)$  erfüllt. Dann ist

$$\rho = \frac{\tau}{\phi(\tau)}$$

der Konvergenzradius von  $y(z)$  und  $y(z)$  hat für  $z \rightarrow \rho$  die Form

$$y(z) = \tau - d_1 \sqrt{1 - \frac{z}{\rho}} + \sum_{j \geq 2} (-1)^j d_j \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{\frac{j}{2}}$$

mit berechenbaren Konstanten  $d_i$  mit

$$d_1 = \sqrt{\frac{2\phi(\tau)}{\phi''(\tau)}}.$$

*Beweis.* Siehe [13] □

Die erzeugenden Funktionen von Strukturen dieses Typs haben also alle eine Singularität mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$ .

**Beispiel 4.** Ein einfaches Beispiel sind Bäume in der Ebene. Jeder Baum lässt sich aus einer Wurzel und einer Folge von ebenen Bäumen erzeugen. Damit ist die erzeugende Funktion

$$A(z) = z \left( \frac{1}{1 - A(z)} \right)$$

und Lösen der quadratischen Gleichung ergibt

$$A(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2}$$

und damit ergeben sich als Anzahl der Bäume in der Ebene mit  $n$  Knoten bekanntlich die Catalan-Zahlen.

### 3.3 Zusammengesetzte alg-log Funktionen

Wir betrachten die Klasse  $\mathcal{C}$ , die sich aus Komponenten einer Klasse  $\mathcal{A}$  zusammensetzt, und zwar so, dass für die erzeugenden Funktionen

$$C(z) = B(A(z))$$

gilt, wobei sowohl  $A(z)$  als auch  $B(z)$  algebraisch-logarithmische Funktionen sind. Sei nun  $\rho$  die dominante Singularität von  $A(z)$ ,  $\tau_0 := A(\rho)$  und  $\tau$  die dominante Singularität von  $B(z)$ . Es wird sich zeigen, dass das Verhalten der Komponentengrößen davon abhängt, wie sich  $\tau_0$  und  $\tau$  zueinander verhalten. Wir können drei Fälle unterscheiden, siehe [18] oder [13]:



- **In subkritischen Strukturen** ist  $\tau_0 < \tau$ .

Hier erreicht die Funktion  $A(z)$  eine Singularität, während  $B(z)$  in der Umgebung des Wertes der Singularität von  $A(z)$  immer noch analytisch ist. Damit kann die dominante Singularität von  $A$  auch keine Polstelle sein. Die Funktion  $C(z)$  ist wieder algebraisch-logarithmisch und die Exponenten sind die der inneren Funktion. Dies zeigt sich durch Einsetzen der algebraisch-logarithmischen Darstellung von  $A(z)$  in der Nähe der Singularität  $\rho$  in die Taylorreihenentwicklung von  $B(z)$  um  $A(\rho)$ .

**Beispiel 5.** Catalan-Bäume sind unmarkierte Wurzelbäume in der Ebene und haben damit erzeugende Funktion

$$T(z) = \frac{z}{1 - T(z)}.$$

Sie lassen sich damit auch als Folge von Teilbäumen betrachten. Dafür können wir die Darstellung

$$T(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2}$$

in die Folgenkonstruktion einsetzen. Dadurch hat die innere Funktion eine Singularität an  $1/4$  mit  $T(1/4) = 1/2$ , also ist die Konstruktion subkritisch.

**Beispiel 6.** Cayley-Bäume sind unmarkierte Wurzelbäume und damit wird jeder Cayley-Baum als eine Wurzel zusammen mit einer Menge von Cayley-Bäumen definiert. Die erzeugende Funktion erfüllt damit

$$T(z) = ze^{T(z)}$$

und wir können den Satz im vorigen Kapitel verwenden um eine Darstellung der Form

$$T(z) = 1 - \sqrt{2(1 - ez)}$$

mit Singularität  $z = \frac{1}{e}$  zu erhalten. Damit erhalten wir eine zusammengesetzte Funktion mit einer inneren algebraisch-logarithmischen Funktion und einer äußeren Exponentialfunktion.

- **In kritischen Strukturen** ist  $\tau_0 = \tau < \infty$ .

Der Wert von  $A(z)$  an der Singularität  $\rho$  ist auch die Singularität von  $B(z)$  und  $C(z)$  ist wieder algebraisch-logarithmisch. Das Verhalten von  $C(z)$  in der Nähe der Singularität hängt von beiden Funktionen ab, wie sich aus Einsetzen der algebraisch-logarithmischen Darstellungen ergibt. Der algebraische Exponent von  $C(z)$  ist das Produkt der algebraischen Exponenten von  $A(z)$  und  $B(z)$  und der logarithmische Exponent ist das Produkt des algebraische Exponenten von  $B(z)$  mit dem logarithmischen Exponenten von  $A(z)$ .

**Beispiel 7.** Die Abbildungen der Zahlen  $1, \dots, n$  auf sich selbst können als eine Menge von Zyklen von markierten Wurzelbäumen betrachtet werden. Ist also  $A(z)$  die erzeugende Funktion der markierten Wurzelbäume, dann ist die exponentielle erzeugende Funktion dieser beiden Konstruktionen zusammen

$$B(z) = \frac{1}{1 - A(z)}.$$

Die innere Funktion hat für  $z \rightarrow \frac{1}{e}$  die Darstellung  $1 - \sqrt{2(1 - ez)}$  und hat damit an der Singularität den Wert 1, also ist die Konstruktion kritisch.

- In **superkritischen Strukturen** ist  $\infty > \tau_0 > \tau$ . Also ist  $A(z)$  analytisch mit größerem Konvergenzradius als  $B(z)$ . Das Verhalten von  $C(z)$  in der Nähe der Singularität hängt dann von der äußeren Funktion  $B(z)$  ab, um das zu sehen, das lässt sich durch Einsetzen der Taylorentwicklung von  $A(z) = A(\rho_0) + A'(\rho_0)(z - \rho_0) + \dots$  in die algebraisch-logarithmische Darstellung von  $B(z)$  zeigen. Die algebraischen und logarithmischen Exponenten sind also die von  $B(z)$ .

**Beispiel 8.** Wenn wir die Anzahl Zerlegungen einer Zahl  $n$  in Summanden mit  $a_1 + a_2 + \dots = n$  betrachten, dann ist die erzeugende Funktion der Zahlen  $1, 2, \dots$  durch

$$A(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + \dots$$

gegeben. Die Anzahl der Zerlegungen ist eine geordnete Folge von Zahlen und hat damit die Erzeugende Funktion

$$B(z) = \frac{1}{1-A(z)}.$$

$A(z)$  ist für  $|z| < 1$  analytisch und  $B(z)$  hat eine Singularität an  $A(z) = 1$ . Das ist der Fall bei  $z = \frac{1}{2}$  und damit ist diese Konstruktion superkritisch.

## 4 Untersuchungen der größten Komponenten

Wir wollen die Verteilung und die Momente der größten Komponenten von kombinatorischen Konstruktionen bestimmen. Dafür benötigen wir zuerst die abgeschnittenen erzeugenden Funktionen.

**Definition 15.** Ist  $A(z)$  eine erzeugende Funktion mit

$$A(z) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k,$$

dann führen wir die Funktionen

$$s_m(z) := \sum_{k=0}^m a_k z^k$$

und

$$r_m(z) := \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k z^k$$

ein.

Ist nun  $C(z) = B(A(z))$  die erzeugende Funktion der betrachteten Strukturen, dann erhalten wir die erzeugende Funktion der Strukturen, deren größte Komponente maximal von der Größe  $m$  ist, durch  $B(s_m(z))$ . Betrachten wir also die Konstruktionen der Gesamtgröße  $n$  und bezeichnen mit  $L_n$  die Größe der größten Komponente, so gilt

$$\Pr(L_n \leq m) = \frac{[z^n](B(s_m(z)))}{[z^n]B(A(z))}.$$

Im Fall von algebraisch-logarithmischen erzeugenden Funktionen  $A(z)$  und  $B(z)$  wird sich herausstellen, dass die Größe der größten Komponenten vom Typ der Singularität abhängt. Für eine subkritische Konstruktion ist die größte Komponente beinahe  $n$ , während sich die größte Komponente einer superkritischen Konstruktion logarithmisch zu  $n$  verhält. Für eine kritische Konstruktion verhält sich der Erwartungswert der größten Komponente in etwa linear zu  $n$ , ebenso für exp-log Strukturen.

Die folgenden Beweise beruhen auf der Betrachtung des Verhaltens von  $r_m(z)$ , woraus sich das Verhalten von  $s_m(z) = A(z) - r_m(z)$  ergibt.

### 4.1 Größte Komponenten von exp-log Konstruktionen

Diese Ergebnisse sind in der Dissertation von Gourdon [17] zu finden. Wir betrachten logarithmische erzeugende Funktionen  $A(z)$  mit Konvergenzradius  $\rho > 0$ , die in einem  $\Delta$ -Bereich analytisch sind und für  $z \rightarrow \rho$

$$A(z) = a \log \left( \frac{1}{1 - z/\rho} \right) + R(z)$$

mit

$$R(\rho z) = K + O(1 - z)^\alpha$$

für  $0 < \alpha \leq 1$  erfüllen. Die erzeugende Funktion für  $C(z) = e^{A(z)}$  hat daher für  $z \rightarrow \rho$  die Form

$$C(z) = \frac{e^{R(z)}}{(1 - z/\rho)} = \frac{e^K}{(1 - z/\rho)} + O\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{\alpha-a},$$

wobei die letzte Gleichung aus der Taylorentwicklung der Exponentialfunktion folgt. Der Ansatz ist,  $r_m$  durch die Integralexponentialfunktion

$$E(x) := \int_x^\infty \frac{e^{-v}}{v} dv$$

darzustellen, daraus erhalten wir eine Darstellung von  $e^{sm(z)}$ , deren Koeffizienten dann durch die Cauchysche Integralformel bestimmt werden können.

**Satz 4.1.** *Ist  $\rho > 0$ , dann gilt*

$$r_m(\rho e^{-p}) = aE(mp) + O\left(\frac{1}{m^\alpha}\right)$$

*gleichmäßig für  $\Re(p) \geq 0$ .*

*Beweis.* Die Koeffizienten von  $A(z)$  erfüllen wegen der Singularitätsanalyse

$$[z^n]A(z) = \frac{1}{\rho^n} \left( \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right) \right).$$

Wir können den Beitrag von  $R(z)$  durch

$$\sum_{k>m} \frac{1}{k^{1+\alpha}} = O\left(\frac{1}{m^\alpha}\right)$$

abschätzen, das sehen wir durch Ersetzen der Folge durch ein Integral. Den Rest von  $r_m$  können wir für  $|z| < 1$  als

$$\sum_{k \geq m} \frac{1}{\rho^k} \frac{a(\rho z)^k}{n} = a \sum_{k > m} \frac{z^n}{n} = a \int_0^z \sum_{k=m}^\infty u^k du = a \int_0^z \frac{u^m}{1-u} du$$

schreiben und mit  $z = e^{-p}$  und Substitution durch  $u = e^{-v/m}$  erhalten wir

$$a \int_{mp}^\infty e^{-v} \frac{v/m}{e^{v/m} - 1} \frac{dv}{v}.$$

Wir können nun eine Funktion  $\phi(z)$  finden mit  $\frac{z}{e^z - 1} = 1 + z\phi(z)$  und damit erhalten wir

$$aE(mp) + a \frac{1}{m} \int_{mp}^\infty e^{-v} \phi(v/m) dv.$$

Wir können uns überlegen, dass das Restintegral beschränkt ist. Zunächst ist  $\phi$  für  $|z| < 2\pi$  analytisch und für  $\Re(z) > \pi$ ,  $|\Im(z)| < \pi$  gilt  $|\phi(z)| \leq \frac{1}{|\pi|} + \frac{1}{e^\pi - 1}$ , daher ist  $\phi$  auf  $\Re(z) > 0$ ,  $|\Im(z)| \leq \pi$  durch eine Konstante  $M$  beschränkt und es ergibt sich

$$\frac{1}{m} \int_\sigma^\infty e^{-v+it} \phi((v+it)/m) dt \leq \frac{M}{m} \int_\sigma^\infty e^{-v} dv \leq \frac{M}{m} e^{-\sigma}.$$

□

**Satz 4.2.** *Einige Abschätzungen des exponentiellen Integrals:*

1. *Es gibt eine ganze Funktion  $E_1(u)$  mit  $E_1(0) = 0$ , so dass*

$$E(u) = -\ln u - \gamma + E_1(u),$$

*wobei  $\gamma$  die Eulersche Konstante ist.*

2. *Für  $\Re(z) > 0$  gilt*

$$E(z) = \frac{e^{-z}}{z} + O\left(\frac{e^{-z}}{z^2}\right).$$

3. *Für  $a > 0$  ist die Funktion  $e^{-aE(u)}$  für positiven Realteil von  $u$  beschränkt.*

*Beweis.* Der Beweis ist in [17] zu finden. □

**Satz 4.3.** *Wenn  $L_n$  die Größe der größten Komponente einer Klasse von exp-log Strukturen der Größe  $n$  beschreibt, gilt gleichmäßig für  $n \rightarrow \infty$  und alle  $1 \leq m \leq n$*

$$\Pr(L_n \leq m) = f_a\left(\frac{m}{n}\right) + O\left(m^{-a\alpha/(1+\alpha)}\right)$$

*mit*

$$f_a(u) = \frac{\Gamma(a)}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{-aE(up)}}{p^a} e^p dp.$$

*Beweis.* Sei  $C_m(z)$  die erzeugende Funktion der Strukturen, deren größte Komponente  $\leq m$  ist, dann ist  $C_m(z) = e^{s_m(z)}$ . Daher gilt auch

$$C_m(z) = e^{A(z)-r_m(z)} = \frac{e^{-r_m(z)}}{(1-z/\rho)^a} e^{R(z)}.$$

Wir wählen als Integrationsweg  $\gamma$  nach Verschieben der Singularität nach 1 den Kreis mit Radius  $|z| = e^{-\frac{1}{n}}$  und teilen die Kontur in die Bereiche

$$\gamma_0 = \{z : |z| = e^{-\frac{1}{n}}, |\operatorname{Arg}(z)| \leq n^{\beta-1}\}$$

$$\gamma_1 = \{z : |z| = e^{-\frac{1}{n}}, |\operatorname{Arg}(z)| > n^{\beta-1}\}$$

mit einem  $0 < \beta < 1$ , das noch bestimmt wird. Wir haben also mit der Cauchyschen Integralformel und Ersetzen von  $C_m(z)$  durch  $C_m(\rho z)$  im Integral den Ansatz

$$[z^n]C_m(z) = \frac{1}{\rho^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-r_m(\rho z)}}{(1-z)^a} e^{R(\rho z)} \frac{dz}{z^{n+1}} = I_0 + I_1.$$

Das Integral über  $\gamma_1$  lässt sich mit partieller Integration behandeln. Mit  $c = \exp(-\frac{1}{n} + in^{\beta-1})$  haben wir wegen der Darstellung von  $e^{s_m(z)}$  von vorher

$$I_1 = \frac{1}{n} \left( \frac{e^{s_m(\rho z)}}{z^n} \Big|_{\bar{c}}^c \right) + \frac{1}{n} \int_{\gamma_1} s'_m(\rho z) e^{s_m(\rho z)} \frac{dz}{z^n}.$$

Die Darstellung von  $r_m$  durch das exponentielle Integral  $e^{-r_m(\rho e^{-p})} = e^{-aE(mp)+O(1)}$  ist für  $|z| < 1$  beschränkt. Damit ergibt sich die Abschätzung

$$e^{s_m(\rho z)} = \frac{e^{-r_m(\rho z)}}{(1-z)^a} e^{R(\rho z)} = O\left(\frac{1}{(1-z)^a}\right).$$

Es gilt  $s'_m(\rho z) = A'(\rho z) - r'_m(\rho z) = O((1-z)^{-1})$ , weil einerseits  $A'(\rho z) = 1/(1-z)$  erfüllt ist und wir andererseits im nächsten Kapitel für alg-log Funktionen zeigen, dass sich  $r_m(\rho(1 + \frac{u}{m})) = \rho^{m+1} (1 + \frac{u}{m})^{m+1} (\log m)(a\psi(u))$  mit  $\psi(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}} \frac{1}{p-u} \frac{1}{e^p} dp$  darstellen lässt. Es gilt also auch  $r'_m(z) = O((1-z)^{-1})$ . Insgesamt erhalten wir

$$I_1 = \frac{1}{n} O\left(\frac{1}{(1-c)^\alpha}\right) = O(n^{a-1}n^{-a\beta})$$

wegen  $|1-c| \sim n^{\beta-1}$  durch Taylorentwicklung von  $e^{-1/n+in^{\beta-1}}$ .

Nun betrachten wir  $I_0$ . Substitution mit  $z = e^{-p/n}$  ergibt

$$I_0 = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{n} \int_{1-in^\beta}^{1+in^\beta} \frac{e^{-r_m(\rho e^{-p/n})}}{(1-e^{-p/n})^a} e^{R(\rho e^{-p/n})} e^p dp.$$

Mit der Darstellung von  $r_m$  durch das exponentielle Integral und der Taylorentwicklung der Exponentialfunktion erhalten wir

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{1-in^\beta}^{1+in^\beta} \frac{e^{-aE(mp/n)} + O(m^{-\alpha})}{(p/n(1+O(p/n)))^a} e^{K+O((p/n)^\alpha)} dp \\ &= n^{a-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{1-in^\beta}^{1+in^\beta} \frac{e^{-aE(pm/n)}}{p^a} e^K \left(1 + O\left(\frac{p}{n}\right)^\alpha + O\left(\frac{1}{m^\alpha}\right)\right) e^p dp \end{aligned}$$

und nachdem sowohl  $e^{aE(pm/n)}$  als auch  $e^p$  auf dem Integrationsweg beschränkt sind, ergibt sich aus dem Integral des mittleren Terms  $O(n^{\alpha(\beta-1)+\beta(a-1)})$ , das schätzt auch das Integral des letzten Terms ab und ergibt insgesamt

$$I_0 = n^{a-1} e^K \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{1-in^\beta}^{1+in^\beta} \frac{e^{-aE(mp/n)}}{p^a} e^p dp + O(m^{\alpha(\beta-1)+\beta(1-a)}) \right).$$

Für den ersten Term können wir die Integralgrenzen nach  $\infty$  verschieben, weil wir den Fehler durch

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1-in^\beta} \frac{e^{-aE(mp/n)}}{p^a} e^p dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{1-in^\beta}^{1+i\infty} \frac{e^{-aE(mp/n)}}{p^a} e^p dp = O(n^{-a\beta})$$

abschätzen können. Wir erhalten also insgesamt

$$[z^n]C_m(z) = n^{a-1} e^K \left( \frac{f_a(m/n)}{\Gamma(a)} + O(m^{\alpha(\beta-1)+\beta(1-a)}) + O(n^{-a\beta}) \right).$$

Wählen wir nun  $\beta = \frac{\alpha}{\alpha+1}$ , dann erhalten wir

$$[z^n]C_m(z) = n^{a-1} e^K \left( \frac{f_a(m/n)}{\Gamma(a)} + O(m^{-\alpha\alpha/(1+\alpha)}) \right).$$

□

**Definition 16.** Die Dickman-Funktion ist eine stetige Funktion, die die Differentialgleichung

$$u\rho'(u) + \rho(u-1) = 0, \quad u > 1$$

und  $\rho(u) = 1, 0 \leq u \leq 1$  erfüllt. Sie beschreibt in der Zahlentheorie die Verteilung der größten Primfaktoren[23].

Wir betrachten

$$\rho_a(u) := f_a\left(\frac{1}{u}\right).$$

Es wird sich herausstellen, dass  $\rho_a$  eine Verallgemeinerung der Dickman-Funktion ist. Genauer werden wir zeigen, dass

$$u^a \rho'_a(u) + a(u-1)^{a-1} \rho_a(u-1) = 0$$

erfüllt ist. Für  $a = 1$  ergibt sich also genau die Dickmann-Funktion. Um das zu zeigen, benötigen wir noch eine Darstellung von  $\rho_a$  als Summe von Faltungen.

**Definition 17.** Ist  $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion, dann ist die Laplace Transformation durch

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

definiert, falls das Integral existiert. Die inverse Laplace-Transformation ist durch

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds$$

gegeben.

Insbesondere ist die Laplace Transformation einer Faltung das Produkt der Laplace Transformaten der einzelnen Funktionen, also

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g).$$

**Satz 4.4.**  $\rho_a$  lässt sich in der Form

$$\rho_a(\lambda) = 1 + \lambda^{a-1} \sum_{k=1}^{\lambda} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{t_1+\dots+t_k \leq \lambda, t_i \geq 1} \frac{dt_1 \dots dt_k}{t_1 \dots t_k (\lambda - t_1 - \dots - t_k)^{1-a}}$$

schreiben.

*Beweis.* Wir verwenden die Funktion

$$H_1(u) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < u \leq 1 \\ \frac{1}{u} & \text{für } u > 1 \end{cases}$$

und erhalten

$$E(p) = \int_1^\infty \frac{e^{-up}}{u} du = \mathcal{L}(H_1)(p).$$

Aus der Definition der Gammafunktion und Substitution mit  $z = up$  ergibt sich

$$\frac{1}{p^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty u^{a-1} e^{-up} = \frac{1}{\Gamma(a)} \mathcal{L}(u^{a-1})(p).$$

Damit erhalten wir  $\Gamma(a) \mathcal{L}(H_1^{(k)} * u^{a-1})(p) = E(p)^k / p^a$ , wobei  $H_1^{(k)}$  die k-fache Faltung von  $H_1$  mit sich selbst ist. Wir erhalten also aus der inversen Laplace-Transformation und der Taylorreihe der Exponentialfunktion die Darstellung

$$\rho_a(\lambda) = \lambda^{1-a} \sum_0^\infty \frac{(-a)^k}{k!} (H_1^{(k)} * u^{a-1}).$$

□

**Satz 4.5.** Die Funktion  $\rho_a$  ist auf  $[0, 1]$  konstant 1 und auf  $[1, \infty]$  stetig differenzierbar und erfüllt

$$\lambda^a \rho'_a(\lambda) + a(\lambda - 1)^{a-1} \rho_a(\lambda - 1) = 0, \quad \lambda \geq 1.$$

*Beweis.* Wir verwenden die Integraldarstellung von  $\rho_a$

$$\rho_a(\lambda) = \lambda^{1-a} \frac{\Gamma(a)}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{-aE(p)}}{p^a} e^{\lambda p} dp.$$

Dieser Term ist nicht direkt differenzierbar, daher schreiben wir  $\rho_a$  als

$$\lambda^{1-a} \frac{\Gamma(a)}{2\pi i} \left( \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{1 - aE(p)}{p^a} e^{\lambda p} dp + \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{-1 + aE(p) + e^{-aE(p)}}{p^a} e^{\lambda p} dp \right) = I_1 + I_2.$$

Die Ableitung des zweiten Integrals existiert, weil sich der Bruch wie  $O(e^{-2p} p^{-a-1})$  verhält und ergibt

$$\begin{aligned} I'_2(\lambda) &= (1-a)\lambda^{-a} \frac{\Gamma(a)}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{-1 + aE(p) + e^{-aE(p)}}{p^a} e^{\lambda p} dp + \\ &+ \lambda^{1-a} \frac{\Gamma(a)}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{-1 + aE(p) + e^{-aE(p)}}{p^{a-1}} e^{\lambda p} dp. \end{aligned}$$

Partielle Integration des zweiten Integrals der letzten Zeile ergibt

$$\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{ae^{-p} - ae^{-p}e^{-aE(p)} - (a-1)(-1 + E(p) + e^{-aE(p)}) e^{\lambda p}}{p^a} \frac{e^{\lambda p}}{\lambda} dp$$

und wir erhalten insgesamt mit der inversen Laplace-Transformation

$$\begin{aligned} I'_2 &= \frac{\Gamma(a)}{2\pi i \lambda} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{-ae^{-aE(p)} + 1}{p^a} e^{(\lambda-1)p} dp \\ &= \frac{\Gamma(a)}{2\pi i \lambda} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{-ae^{-aE(p)}}{p^a} e^{(\lambda-1)p} dp + a(\lambda-1)^{a-1} \lambda^{-a}. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir das erste Integral. Dieses hat als inverse Laplace-Transformation die Form

$$I_1(\lambda) = 1 + a\lambda^{1-a} \int_{\lambda-1}^0 \frac{dt}{(-t + \lambda)t^{1-a}}$$

mit Ableitung

$$I'_1(\lambda) a(1-a)\lambda^{-a} \int_{\lambda-1}^0 \frac{dz}{z^{1-a}(-z + \lambda)} - a\lambda^{1-a} \int_{\lambda-1}^0 \frac{dz}{z^{1-a}(-z + \lambda)^2} - a\lambda^{1-a} \frac{1}{(\lambda-1)^{1-a}}$$

und

$$-a\lambda^{-a} \int_{\lambda-1}^0 \frac{\lambda dz}{z^{1-a}(-z + \lambda)^2} = -a\lambda^{-a} \int_{\lambda-1}^0 \frac{(\lambda - z) dz}{(-z + \lambda)^2 z^{1-a}} - a\lambda^{-a} \int_{\lambda-1}^0 \frac{z dz}{z^{1-a}(-z + \lambda)^2}.$$

Aus dem zweiten Term erhalten wir

$$-a\lambda^{-a} \int_{\lambda-1}^0 \frac{z^a}{(-z + \lambda)^2} = -a\lambda^{-a} \left( \frac{z^a}{-z + \lambda} \right) \Big|_{\lambda-1}^0 + a^2 \lambda^{-a} \int_{\lambda-1}^0 \frac{dz}{z^{1-a}(-z + \lambda)}$$



und insgesamt ergibt sich für die Ableitung des ersten Integrals

$$I_1'(\lambda) = -a\lambda^{1-a}(\lambda-1)^{a-1} + a\frac{(\lambda-1)^a}{\lambda^a}.$$

Es bleibt nur der Integralterm aus dem Ergebnis von  $I_2$  und daraus folgt

$$\rho_a'(\lambda) = \lambda^{-a} \frac{\Gamma(a)}{2\pi i} (-a) \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{-aE(p)}}{p^a} e^{(\lambda-1)p} = \lambda^{-a} \rho_a(\lambda-1)(\lambda-1)^{a-1}.$$

□

**Satz 4.6.** Für eine exp-log Funktion erfüllt der Erwartungswert die Abschätzung

$$\mathbb{E}(L_n) = G_a n + O(n^{1-a\alpha/(1+\alpha)})$$

mit

$$G_a := \frac{1}{a} \int_0^\infty (1 - e^{-aE(u)}) du.$$

Für die Varianz gilt

$$\mathbb{V}(L_n) = H_a n^2 + O(n^{2-a\alpha/(1+\alpha)})$$

mit

$$H_a := \frac{2}{a(a+1)} \int_0^\infty u (1 - e^{-aE(u)}) du - G_a^2.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\mathbb{E}(L_n) = \sum_{m=1}^n (1 - \Pr(L_n \leq m)) = n - \sum_{m=1}^n f_a\left(\frac{m}{n}\right) + O(n^{1-a\alpha/(1+\alpha)})$$

und durch Ersetzen der Summe durch ein Integral

$$\mathbb{E}(L_n) = n \left( 1 - \int_0^1 f(\mu) d\mu \right) + O(n^{1-a\alpha/(1+\alpha)}).$$

Daher wissen wir, dass  $\mathbb{E}(L_n)$  die asymptotische Form  $cn$  hat. Wir definieren nun die erzeugende Funktion

$$M_a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \frac{z^n}{n!} \text{ mit } K_n = C_n \mathbb{E}(L_n),$$

wobei  $C_n = [z^n]C(z)$  die Anzahl aller Strukturen der Größe  $n$  ist. Wir wissen dass sich  $\frac{C_n}{n!}$  wie  $e^K \frac{n^{a-1}}{\Gamma(a)}$  verhält, also haben wir für die Asymptotik von  $K_n$

$$\frac{K_n}{n!} \sim ce^K \frac{n^a}{\Gamma(a)}.$$

Damit erhalten wir aber auch das Verhalten von  $M_a$  in der Nähe von 1, nämlich

$$M_a \sim c \frac{ae^K}{(1-z)^{a+1}}.$$

Andererseits erhalten wir aus der Definition der  $K_n$  und der Konstruktion der erzeugenden Funktion der Strukturen mit größtem Element  $\leq m$  durch  $e^{s_m}$  die Darstellung

$$M_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \sum_{m=1}^n (1 - \Pr(L_n \leq m)) = \sum_{m=1}^{\infty} (C(z) - e^{s_m(z)})$$

und damit

$$M_a = \frac{e^{R(z)}}{(1-z)^a} N_a(z)$$

mit

$$N_a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{r_m(z)}).$$

Durch die Integraldarstellung von  $r_m$  ergibt sich

$$N_a(e^{-p}) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-aE(np)}) + O\left(\frac{1}{p}\right)$$

und wir können wieder die Summe durch ein Integral ersetzen und erhalten

$$N_a(e^{-p}) \sim \frac{1}{p} \int_0^{\infty} (1 - e^{-aE(u)}) du.$$

Wir erhalten also insgesamt für  $p \rightarrow 0$

$$M_a(e^{-p}) \sim \frac{ae^K}{(1-e^{-p})^{a+1}} \left( \frac{(1-e^{-p})}{ap} \int_0^{\infty} (1 - e^{aE(u)}) du \right).$$

Damit ergibt sich die Behauptung. Der Beweis für die Varianz funktioniert ähnlich.  $\square$

Die Größe der größten Komponente ist also proportional zu  $n$  mit einer Konstante, die von  $a$  abhängt. Es gibt auch eine Untersuchung der größten Komponenten von exp-log Strukturen [19], die elementare Methoden verwendet und zu sehr ähnlichen Ergebnissen für die Verteilung der größten Komponenten kommt.

## 4.2 Größte Komponenten von alg-log Konstruktionen

Diese Ergebnisse stammen von Gourdon [18],[17]. Wir betrachten Strukturen, deren Erzeugende Funktion die Form

$$C(z) = B(A(z))$$

hat, wobei (abgesehen vom unkritischen Fall) sowohl  $A(z)$  als auch  $B(z)$  algebraisch-logarithmische Strukturen sind. Alle erzeugenden Funktionen sind also in einem  $\Delta$ -Gebiet analytisch und haben für  $z \rightarrow \rho$  die Form

$$A(z) = c + \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{\alpha} \left(\log \frac{1}{1 - z/\rho}\right)^{\beta} (d + o(1)).$$

Sowohl das Verhalten der größten Komponenten als auch die Behandlung des Problems hängt maßgeblich davon ab, welche der beteiligten Funktionen ihre Singularität früher erreicht.

### 4.2.1 Subkritische Strukturen

Hier erreicht die innere Funktion  $A(z)$  ihre Singularität  $\rho_A$ , während  $B(z)$  einen Konvergenzradius  $R$  besitzt, der größer als  $A(\rho_A)$  ist. Die Vorgehensweise ist, zunächst eine asymptotische Darstellung von  $r_m(z) = \sum_{k=m+1}^{\infty} A_k z^k$  zu finden. Die Funktion  $B(s_m(z)) = B(A(z) - r_m(z))$  wird als Taylorreihe geschrieben und die Summanden der Form  $A(z)^j r_m(z)^k$  können mit Hilfe der Darstellung von  $r_m(z)$  abgeschätzt werden. Zunächst also die Abschätzung des Verhaltens von  $r_m$ :

**Satz 4.7.** *Es sei  $A(z)$  eine algebraisch-logarithmische Funktion, die in einem  $\Delta$ -Gebiet mit Winkel  $\phi$  und äußerem Radius  $\rho(1 + \eta)$  mit  $\eta > 0$  analytisch ist und für  $z \rightarrow \rho$  die oben beschriebene Darstellung besitzt. Dann erfüllt  $r_m$  für  $m \rightarrow \infty$  die Abschätzung*

$$r_m \left( \rho \left( 1 + \frac{u}{m} \right) \right) = \rho^{m+1} \left( 1 + \frac{u}{m} \right)^{m+1} \frac{(\log m)^\beta}{m^\alpha} (d\psi_\alpha(u) + o(1))$$

gleichmäßig für  $|1 + u/m| \leq 1 + \eta/2$ , wobei sich  $u$  links von der Hankel-Kontur befindet, die aus den Halbgeraden  $\{-2 + e^{i\phi}t | t \geq 0\}, \{-2 + e^{-i\phi}t | t \geq 0\}$  besteht, mit

$$\psi_\alpha(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}} \frac{(-p)^\alpha}{p - u} \frac{1}{e^p} dp,$$

wobei  $\mathcal{H}$  die Hankel-Kontur ist, die aus den Halbgeraden  $\{-1 + e^{i\phi}t | t \geq 0\}, \{-1 + e^{-i\phi}t | t \geq 0\}$  besteht.

*Beweis.* Die Darstellung von  $r_m$  durch eine erzeugende Funktion ist durch

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{r_m(t)}{t^{m+1}} z^m = \frac{A(z) - A(t)}{z - t}$$

gegeben. Damit reduziert sich das Problem für einen passenden Integrationspfad  $\gamma$  auf die Anwendung der Cauchyschen Integralformel

$$\frac{r_m(t)}{t^{m+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{A(z)}{z - t} \frac{1}{z^{m+1}} dz,$$

nachdem das Integral über  $A(t)/(z - t)$  verschwindet, weil  $A(t)$  konstant ist. Wir nehmen an, dass sich  $z = t$  im Inneren der Integrationskurve befindet und insbesondere  $|t| < 1 + \eta/2$ . Wir betrachten den Integrationspfad

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \left\{ z : z = 1 - \frac{1}{m} + x e^{i\phi}, |z| \leq 1 + \eta \right\} \\ \gamma_2 &= \left\{ z : z = 1 - \frac{1}{m} + x e^{-i\phi}, |z| \leq 1 + \eta \right\} \\ \gamma_3 &= \left\{ z : |z| = 1 + \eta, \operatorname{Arg} \left( z - 1 + \frac{1}{m} \right) \geq \phi \right\}. \end{aligned}$$

Wie üblich bei dieser Art von Argument ist das Integral über  $\gamma_3$  klein und wir betrachten die Substitution  $z = 1 + p/m$ . Der Integrationspfad verläuft damit über eine Hankel-Kontur der Form  $-1 + e^{i\phi}t, -1 + e^{-i\phi}t$ . Teilen des Integrationspfades an  $p = \log^2 m$  und Abschätzen von  $(1 + p/m)^{-m-1}$  durch die Exponentialfunktion ergeben dann die Behauptung.  $\square$

Es reicht, den Fall zu betrachten, dass die Singularität an 1 liegt.

**Satz 4.8.** *Es seien  $f(z)$  und  $g(z)$  zwei algebraisch-logarithmische Funktionen mit Singularität an 1, die zusätzlich für  $z \rightarrow 1$  die folgende Darstellung erfüllen:*

$$f(z) \sim (1-z)^\alpha \left( \log \frac{1}{1-z} \right)^\beta$$

$$g(z) = (1-z)^\gamma \left( \log \frac{1}{1-z} \right)^b (c + o(1))$$

Weiters sei  $r_m(z) = \sum_{j>m} f_j z^j$  und es seien  $k, l$  ganze Zahlen  $\geq 0$  mit  $k < l$ . Dann gilt für  $m \rightarrow \infty$  gleichmäßig für  $\lambda = n/m$  in jedem abgeschlossenen Teilintervall von  $[k, l]$

$$[z^n](r_m(z)^k g(z)) = \frac{\log^{k\beta+\delta} m}{m^{1+k\alpha+\gamma}} \left( c \Lambda \left( \frac{m}{n} \right) + o(1) \right)$$

mit

$$\Lambda(\lambda) = \int_{\mathcal{H}} \psi_\alpha(u)^k (-u)^\gamma e^{-u(\lambda-k)} du.$$

Hier ist  $\mathcal{H}$  eine Hankel-Kontur, die die positive reelle Achse umläuft und aus den Halbgeraden  $-2 + e^{i\phi}t$ ,  $-2 + e^{-i\phi}t$ ,  $t \geq 0$  besteht.

*Beweis.* Wir betrachten wieder die Cauchysche Integralformel

$$[z^m]r_m(z)^k g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} r_m(z)^k g(z) \frac{1}{z^{n+1}} dz$$

mit Integrationspfad

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \left\{ z : z = 1 - \frac{2}{m} + xe^{i\phi}, |z| \leq 1 + \eta/2 \right\} \\ \gamma_2 &= \left\{ z : z = 1 - \frac{2}{m} + xe^{-i\phi}, |z| \leq 1 + \eta/2 \right\} \\ \gamma_3 &= \left\{ z : |z| = 1 + \eta/2, \text{Arg} \left( z - 1 + \frac{2}{m} \right) \geq \phi \right\} \end{aligned}$$

Der Pfad ist so gewählt, dass die Darstellung von  $r_m(z)$  aus dem vorigen Satz gilt. Substitution durch  $z = 1 + u/m$  und die Abschätzung von  $r_m$  ergibt dann die Behauptung.  $\square$

**Satz 4.9.** *Es sei  $A(z)$  algebraisch-logarithmisch mit  $0 < \alpha < 1$  und die Funktion  $B(z)$  analytisch mit Konvergenzradius  $R > A(\rho) = c$ . Dann gilt für alle  $l \geq 2$ ,  $l \in \mathbb{N}$*

$$\mathbf{Pr}(L_n \leq m) = a_l \left( \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} \right)^{l-1} (\lambda^{1+l\alpha} K_{\alpha,l}(\lambda) + o(1))$$

mit

$$a_l = \frac{d^{l-1} B^{(l)}(c)}{\Gamma(-\alpha)^{l-1} l! B'(c)}$$

gleichmäßig für  $n \rightarrow \infty$  und  $\lambda = \frac{n}{m}$  in jedem abgeschlossenen Teilintervall von  $(l-1, l]$ . Hier ist  $K_{\alpha,l}$  die  $l$ -fache Faltung der Funktion  $H_\alpha$ , die durch

$$H_\alpha(t) := \begin{cases} \frac{1}{t^{1+\alpha}} & \text{für } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist. Wir erhalten also

$$K_{\alpha,l}(\lambda) = \int_{t_1+t_2+\dots+t_l=\lambda} H_\alpha(t_1) \dots H_\alpha(t_l) dt_1 \dots dt_l.$$

*Beweis.* Wir betrachten  $l-1 < n/m \leq l$  und die Darstellung von  $B(s_m(z))$  als Taylorreihe mit  $\hat{s}_m(z) = s_m(z) - A(\rho)$ . Es gilt also

$$[z^n]B(s_m(z)) = [z^n]B(\hat{s}_m(z) + A(\rho)) = [z^n] \sum_{j \geq l} \frac{B^{(j)}(A(\rho))}{j!} \hat{s}_m(z)^j,$$

wobei die Summationsgrenzen aus der Tatsache folgen, dass  $\hat{s}_m(z)^j$  nur Koeffizienten bis zur Größe  $mj$  besitzt. Wir betrachten nun  $g(z) = A(z) - A(\rho)$ , ersetzen  $\hat{s}_m(z)$  durch  $g(z) - r_m(z)$  und erhalten

$$[z^n] \sum_{j \geq l} \frac{B^{(j)}(A(\rho))}{j!} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} g(z)^{j-k} r_m(z)^k (-1)^k.$$

Nachdem  $[z^n]r_m^j(z) = 0$  für  $j \geq l$  gilt, ergibt sich durch herausziehen von  $j = l$

$$[z^n] \frac{B^{(l)}(A(\rho))}{l!} \left( \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^k \binom{l}{k} g(z)^{l-k} r_m(z)^k \right) + \sum_{j=0}^{l-1} r_m(z)^j g(z)^{l+1-j} C_j(z)$$

mit  $C_j = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{l+1+k}{j} g(z)^k (-1)^k$ . Damit sind die  $C_j(z)$  in der Nähe von  $\rho$  algebraisch-logarithmisch und beschränkt. Weil  $g(z)^j$  ebenfalls algebraisch-logarithmisch mit algebraischem Exponenten  $j\alpha$  und logarithmischem Exponenten  $j\beta$  ist, erhalten wir aus dem vorigen Satz die Abschätzung, wobei  $\mathcal{H}_1$  hier auch die Hankel-Kontur aus dem vorigen Satz ist

$$[z^n]r_m(z)^k g(z)^{l-k} = \frac{\log^{k\beta+(l-k)\beta}}{m^{1+k\alpha+(l-k)\alpha}} \left( c\Lambda \left( \frac{n}{m} \right) + o(1) \right)$$

und damit

$$[z^n]B(s_m(z)) = \frac{d^l B^{(l)}(A(\rho))}{l!} \frac{(\log m)^{l\beta}}{m^{1+l\alpha}} \left( J_{\alpha,l} \left( \frac{n}{m} \right) + o(1) \right)$$

mit

$$\begin{aligned} J_{\alpha,l} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}_1} \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} \psi_\alpha(u)^k (-u)^{\alpha(l-k)} e^{-u(\lambda-k)} du \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}_1} \left( ((-u)^\alpha - e^u \phi_\alpha(u))^l - (-1)^l e^{lu} \psi_\alpha(u)^l \right) \frac{du}{e^{u\lambda}}. \end{aligned}$$

Die restliche Summe hat einen höheren algebraischen Koeffizienten und ist daher vernachlässigbar. Nun ist

$$\psi_\alpha(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}} \frac{(-p)^\alpha}{p-u} \frac{dp}{e^p} = \int_{\mathcal{H}} \frac{(-p)^\alpha}{e^p} \left( \int_0^\infty e^{-x(p-u)} dx \right) dp,$$

wobei  $\mathcal{H}$  die bei der Definition von  $\psi$  verwendete Hankel-Kontur ist und damit auch

$$\psi_\alpha(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left( \int_{\mathcal{H}} e^{-p(x+1)} (-p)^\alpha dp \right) e^{ux} dx.$$

Durch Substitution mit  $z = p(x + 1)$  und Verwendung der Hankel-Darstellung der Gammafunktion  $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \int_{\mathcal{H}} (-t)^\alpha e^{-t} dt$  erhalten wir (hier beschreibt  $\mathcal{H}$  den Integrationspfad nach Substitution, der ebenfalls eine Hankel-Kontur ist)

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(u) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left( \int_{\mathcal{H}} e^{-z} (-z)^\alpha \frac{1}{(x+1)^{\alpha+1}} dz \right) e^{ux} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{u(x+1)}}{(x+1)^{\alpha+1}} e^{-u} dx = \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{-u}}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}(G_\alpha)(-u)\end{aligned}$$

für

$$G_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1-\alpha}} & \text{für } x \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ändern der Integralgrenzen von einer Hankel-Kontur auf die reelle Achse ist möglich, weil das Argument stetig ist und Verwendung von

$$(-u)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \mathcal{L}\left(\frac{1}{x^{\alpha+1}}\right)(-u)$$

ergibt

$$J_{\alpha,l} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)^l} \left( \int_{-1-i\infty}^{-1+i\infty} (\mathcal{L}(H_\alpha(-u))^l - (-1)^l \mathcal{L}(G_\alpha)(-u)^l) e^{-u\lambda} du \right).$$

Das ist eine inverse Laplacetransformation und ergibt  $H_\alpha^{(l)}/\Gamma(-\alpha)^l$  □

**Satz 4.10.** *Der Erwartungswert und die Varianz von  $L_n$  erfüllen für  $n \rightarrow \infty$*

$$\mathbb{E}(L_n) = n - \kappa_1 n^{1-\alpha} (\log n)^\beta (1 + o(1))$$

und  $\mathbb{V}(L_n) \sim \kappa_2 n^{2-\alpha} (\log n)^\beta$ , wobei die Konstanten  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  durch

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \frac{dF''(c)}{F'(c)} 2^{2\alpha-1} \left( \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)} - \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2-\alpha)} \right) \\ \kappa_2 &= \frac{dF''(c)}{F'(c)} 2^{2\alpha-1} (1-\alpha) \left( \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/2-\alpha)} \right)\end{aligned}$$

gegeben sind.

*Beweis.* Wir betrachten für den Erwartungswert die Summe

$$n - \mathbb{E}(L_n) = \sum_{k=0}^n k \Pr(L_n = n - k).$$

Die Abschätzung im vorigen Satz funktioniert für  $\lambda = \frac{n}{n-k}$  in einem abgeschlossenen Teilintervall von  $(1, 2]$ , kleine Werte von  $k$  müssen wir daher direkt behandeln. Wir spalten daher die Summe an  $k = n/2$  auf und erhalten aus dem vorigen Satz und der Integraldarstellung

$$S_2 := \sum_{k=n/2}^n k \Pr(L_n = n - k) \leq n \Pr\left(L_n \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) = o(n^{1-\alpha \log^\beta n})$$

Um die zweite Summe

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n/2} k \Pr(L_n \leq (n-k))$$

abzuschätzen, betrachten wir die Darstellung

$$\Pr(L_n = n-k) = \frac{[z^n](B(s_{n-k}(z)) - B(s_{n-k-1}(z)))}{[z^n]B(A(z))}.$$

Wenn wir  $B(s_m)$  als Taylorentwicklung betrachten, erhalten wir

$$B(s_m(z)) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^{(l)}(A(z))}{l!} (-1)^l r_m(z)^l.$$

Für  $2m \geq n$  wird für  $l > 1$  bereits ein zu großer Exponent von  $z$  erreicht, dann gilt  $[z^n]r_m(z)^l = 0$  und damit gilt  $[z^n]B(s_m(z)) = [z^n](B(A(z)) - r_m(z)B'(A(z)))$ . Es ergibt sich

$$\Pr(L_n = n-k) = \frac{[z^n](r_{n-k-1}(z) - r_{n-k})B'(A(z))}{[z^n]B(A(z))} = \frac{[z^{n-k}]A(z)}{[z^n]B(A(z))} [z^k]B'(A(z)).$$

Wir wissen aus der Singularitätsanalyse, dass sich die Koeffizienten wie

$$[z^{n-k}]A(z) = \frac{1}{\rho^{n-k}} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{\log(n-k)^\beta}{(n-k)^{1+\alpha}} (d + o(1))$$

verhalten. Weil die Komposition subkritisch ist, haben wir in der Umgebung von  $z = \rho$  eine Darstellung von  $B(A(z))$  durch  $B(A(z)) = B(A(\rho)) + B'(A(\rho))(A(z) - A(\rho))(1 + o(1))$  und damit

$$[z^n]B(A(z)) = B'(A(\rho)) \frac{1}{\rho^n} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{\log^\beta n}{n^{1+\alpha}} (d + o(1))$$

und analog für  $[z^k]B'(A(z))$ . Damit ergibt sich

$$\Pr(L_n = n-k) \sim C \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{-1-\alpha} \frac{\log^\beta k}{k^{\alpha+1}}$$

mit

$$C = \frac{dB''(c)}{\Gamma(-\alpha)B'(c)}, \quad c = A(\rho).$$

Durch Abschätzen dieser Summe durch ein Integral erhalten wir

$$S_1 \sim C n^{1-\alpha} (\log n)^\beta \int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x)^{1+\alpha} x^\alpha}.$$

Das Integral in der Formel kann mit Hilfe der Betafunktion abgeschätzt werden. Für die Varianz kann mit

$$\mathbb{V}(L_n) = \sum_{k=0}^n k^2 Pr(L_n = n-k) - (n - \mathbb{E}(L_n))^2$$

begonnen werden und mit dem selben Ansatz und dem Ergebnis des ersten Teils ergibt sich dann die Behauptung. □

Die größte Komponente hat also fast die Größe  $n$ , daher können wir erwarten, dass es ansonsten noch einige kleinere Komponenten geben wird. Wir werden bei der Betrachtung der Erwartungswerte der kleinsten Komponente von  $\exp(\text{alg-log})$ -Strukturen sehen, dass deren Erwartungswert asymptotisch  $cn$  für eine kleine Konstante  $c$  ist. Wenn alle Strukturen mindestens zwei Komponenten hätten, würde daraus  $\mathbb{E}(L_n + X_n^{(1)}) = n(1+c)$  folgen und das wäre ein Widerspruch. Es gibt aber einen Anteil an Strukturen, die nur aus einer Komponente bestehen, in diesem Fall fallen größte und kleinste Komponente zusammen. Dieser Anteil muss dann auch gegen  $c$  konvergieren.

#### 4.2.2 Kritische Strukturen

Wir behandeln die kritischen Kompositionen ähnlich wie den unkritischen Fall, indem wir die asymptotische Darstellung von  $r_m(z)$  in eine Taylorreihenentwicklung einsetzen. Wir können

$$A(z) = \omega_0 + D \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^\alpha \log^\beta \left(\frac{1}{1 - z/\rho}\right) (1 + o(1))$$

und

$$B(\omega) = E + F \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^\gamma \log^\delta \left(\frac{1}{1 - \omega/\omega_0}\right) (1 + o(1))$$

schreiben. Dann gilt für  $z \rightarrow \rho$

$$C(z) = E + \frac{F}{\omega_0^\gamma} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{\alpha\gamma} \log^{\gamma\beta} \left(\frac{1}{1 - z/\rho}\right) \alpha^\delta \log^\delta \left(\frac{1}{1 - z/\rho}\right) (1 + o(1)).$$

Wir können nun ebenso wie im unkritischen Fall vorgehen.

**Satz 4.11.** *Sei die Funktion  $B(z)$  algebraisch-logarithmisch mit Singularität  $\omega > 0$ , so dass der Exponent des algebraischen Teils die Bedingung  $\gamma < 1, \neq 0$  erfüllt. Weiters sei  $A(z)$  algebraisch logarithmisch an  $\rho > 0$  mit  $A(\rho) = \omega_0$  und algebraischem Exponenten  $0 < \alpha < 1$ . Dann gilt für  $\lambda > 1$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left( L_n \leq \frac{n}{\lambda} \right) = 1 + \lambda^{\alpha\gamma+1} \sum_{j \geq 1} a_j F_j(\lambda)$$

mit

$$a_j = \frac{(-1)^j (\gamma)_j}{j!} \frac{\Gamma(-\alpha\gamma)}{\Gamma(-\alpha)^j \Gamma(\alpha(j-\gamma))}$$

wobei  $(\gamma)_j = \gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-j+1)$  und  $F_j(\lambda) = (G_\alpha^{(j)} * u^{\alpha(j-\gamma)-1})(\lambda)$  mit

$$G_\alpha = \begin{cases} u^{-\alpha-1} & \text{wenn } u > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sind.

*Beweis.* Wir erhalten das Verhalten von  $[z^n]C(z)$  durch

$$C_n = c \frac{1}{\rho^n} \frac{n^{-\alpha\gamma-1}}{\Gamma(-\alpha\gamma)} \log^{\beta\gamma+\delta} (1 + o(1))$$



mit einer Konstanten  $c$ . Nun betrachten wir das Verhalten von  $B(s_m(z))$ . Wir wenden wieder die Taylorreihe mit  $r_m(z) = A(z) - s_m(z)$  an und erhalten

$$[z^n]B(s_m(z)) = [z^n] \sum_{j=0}^l (-1)^j \frac{B^{(j)}(A(z))}{j!} r_m(z)^j$$

nachdem  $B^{(j)}(z)$  wieder algebraisch-logarithmisch ist. Damit ist  $B^{(j)}(A(z))$  algebraisch-logarithmisch und verhält sich nahe  $\rho$  wie

$$B^{(j)}(A(z)) = (\gamma)_j \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{\alpha(\gamma-j)} \log\left(\frac{1}{1 - z/\rho}\right)^{\beta\gamma+\delta} (1 + o(1)).$$

Wir erhalten dann mit Hilfe der Abschätzung für das Residuum

$$r_m\left(\rho\left(1 + \frac{u}{m}\right)\right) = \rho^{m+1} \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{m+1} \frac{(\log m)^\beta}{m^\alpha} (D\psi_\alpha(u) + o(1))$$

und durch Substitution durch  $(1 + u/m) = z$

$$[z^n] \frac{B^{(j)}(A(z))}{j!} r_m(z)^j = \int_{\mathcal{H}} \frac{(-1)^j (\gamma)_j}{j!} \rho^{n/\lambda+1} (-u/m)^{\alpha(\gamma-j)} \log(m/u)^{\beta\gamma+\delta} \left(1 - \frac{u}{m}\right)^{jm} \psi_\alpha^j(u).$$

Durch Division durch  $C_n$  und Abschätzen von  $(1 + u/m)^m$  durch  $e^u$  erhalten wir

$$\Pr(L_n \leq m) = (-\alpha\gamma)\lambda^{1+\alpha\gamma} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}} (-u)^{\alpha\gamma} \left(\sum_{j=0}^l \frac{(-1)^j (\gamma)_j}{j!}\right) \left(\frac{e^u \psi_\alpha(u)}{(-u)^\alpha}\right)^j e^{-u\lambda} du.$$

Die Behauptung ergibt sich dann wieder durch Ändern des Integrationspfads auf die Linie mit Realteil 1 und Betrachten der Formel als inverse Laplace-Transformation.  $\square$

**Satz 4.12.** *Varianz und Erwartungswert der größten Komponenten  $L_n$  erfüllen für  $n \rightarrow \infty$*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(L_n) &\sim c_1 n \\ \mathbb{V}(L_n) &\sim c_2 n^2 \end{aligned}$$

mit den Konstanten

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\alpha\gamma} \int_0^\infty \left( \left(1 - \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{\alpha+1}} dt\right)^\gamma - 1 \right) dx, \\ c_2 &= \frac{2}{\alpha\gamma(1-\alpha\gamma)} \int_0^\infty \left( \left(1 - \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{\alpha+1}} dt\right)^\gamma - 1 \right) x dx - c_1^2. \end{aligned}$$

*Beweis.* Wir haben

$$\mathbb{E}(L_n) = \sum_{m=1}^n (1 - \Pr(L_n \leq m)) \sim \sum_{m=1}^n \left(1 - 1 - \lambda^{\alpha\gamma+1} \sum_{j \geq 1} a_j F_j(\lambda)\right)$$

und mit Betrachten von Summen als Integral erhält man ein Ergebnis der Form  $c_1 n$ , mit  $c_1 = \int_0^1 1 - (1 - \dots)$ . Andererseits kann man

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \mathbb{E}(L_n) z^n = \sum_{m \geq 0} (B(A(z)) - B(s_m(z)))$$

definieren und bekommt wegen der Darstellung von  $\mathbb{E}(L_n) \sim c_1 n$  für  $\rho = 1$  auch das asymptotische Verhalten von  $C_n \mathbb{E}(L_n)$  durch

$$C_n \sim \frac{n^{-\alpha\gamma-1}}{\Gamma(-\alpha)} \log^{\beta\gamma+\delta}(n)$$

und damit erhalten wir

$$H(z) \sim K(1-z)^{\alpha\gamma-1} \left( \log \frac{1}{1-z} \right)^{\beta\gamma+\delta}$$

für ein noch unbekanntes  $K$ . Wegen der Taylorreihe der Exponentialfunktion erhalten wir für  $h \rightarrow 0$

$$r_m(e^{-h}) = \frac{e^{-mh}}{m^\alpha} (d\psi_\alpha(-mh) + o(1)) \sim \frac{e^{-mh}}{m^\alpha} d \int_{\mathcal{H}} \frac{(-p)^\alpha}{p+mh} \frac{dp}{e^p}$$

und durch die Darstellung von  $\psi(u)$  als Laplace-Transformation

$$s_m(e^{-h}) = \omega + dh^\alpha \left( 1 - \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{mh}^{\infty} \frac{e^{-v}}{v^{1+\alpha}} + o(1) \right).$$

Wenn wir diese Darstellung in  $B(A(e^{-h}) - B(s_m(e^{-h})))$  einsetzen, erhalten wir

$$(1 - e^{-h})^{\alpha\gamma} \left( \log \frac{1}{1 - e^{-h}} \right)^{\beta\gamma+\delta} \left( \left( 1 - \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{mh}^{\infty} \frac{e^{-v}}{v^{1+\alpha}} dv \right)^\gamma - 1 \right)$$

und Darstellung der Summe als Integral ergibt die Behauptung. Ein ähnliches Argument wurde bereits bei den größten Komponenten von exp-log Konstruktionen verwendet.

Der Beweis der Varianz funktioniert ähnlich mit

$$\mathbb{E}(L_n^2) = \sum_{m=0}^n (2m+1) \mathbf{Pr}(L_n \geq m).$$

□

Die größte Komponente ist also proportional zu  $n$  mit einer Konstante, die von den algebraischen Exponenten der erzeugenden Funktionen abhängt.

### 4.2.3 Superkritische Strukturen

Hier ist der Konvergenzradius von  $B(z)$  kleiner als der von  $A(z)$  an der Singularität angenommene Wert. Es wird sich herausstellen, dass die Verteilungsfunktion der größten Komponenten eine doppelt exponentielle Form hat. Der Beweis beruht auf dem Betrachten des Verhaltens der Singularität von  $B(s_m(z))$ .

**Satz 4.13.** *Sei  $B(z)$  algebraisch-logarithmisch mit Singularität  $\omega > 0$  und sei  $A(z)$  algebraisch logarithmisch mit Singularität  $\rho > 0$  und  $A(\rho) > \omega$ , mit der Darstellung*

$$A(z) = c + d \left( 1 - \frac{z}{\rho} \right)^\alpha \left( \log \frac{1}{1 - z/\rho} \right)^\beta (1 + o(1))$$

für  $z \rightarrow \rho$  und  $\alpha \notin \{0, 1, 2, \dots\}$ . Sei  $a > 0$ , so dass  $A(a) = \omega$  und sei  $\epsilon > 0$  ausreichend klein. Dann gilt für die Verteilung der größten Komponenten

$$\mathbf{Pr}(L_n \leq m) = e^{-nJ_m} (1 + O(e^{-m\epsilon}))$$

mit

$$J_m \sim \frac{d}{\Gamma(-\alpha)A'(a)(\rho - a)} \frac{(\log m)^\beta}{m^{\alpha+1}} \left( \frac{a}{\rho} \right)^m.$$

*Beweis.* Die Funktion  $B(A(z))$  hat ihre dominante Singularität an  $a$ . Wir betrachten die dominanten Singularitäten von  $B(s_m(z))$  und bezeichnen diese als  $a_m$ . Es gilt dann  $a_m \rightarrow a < \rho$  und  $s_m(a_m) = A(a) = \omega$  und für  $r_m(a_m)$  gilt dann

$$r_m(a_m) = \sum_{k>m} A_k a_m^k = \frac{d}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{k>m} \left(\frac{a_m}{\rho}\right)^k \frac{(\log k)^\beta}{k^{\alpha+1}}.$$

Durch Abschätzen durch eine geometrische Reihe und wegen  $a_m \rightarrow a$  erhalten wir daraus

$$r_m(a_m) \sim \left(\frac{a_m}{\rho}\right)^{m+1} \frac{1}{1-a/\rho} \frac{d}{\Gamma(-\alpha)} \frac{(\log m)^\beta}{m^{\alpha+1}}.$$

Nun gilt  $r_m(a_m) = A(a_m) - A(a) \sim (a_m - a)A'(a)$  und wir definieren  $J_m$  durch

$$e^{J_m} = \frac{a_m}{a}.$$

Daraus folgt

$$J_m \sim \left(\frac{a}{a_m}\right)^m \left(1 - \frac{a}{a_m}\right) \sim \left(\frac{a}{a_m}\right)^m \frac{r_m(a_m)}{a_m A'(a)} \sim \left(\frac{a}{\rho}\right)^m \frac{d}{\Gamma(-\alpha) A'(a) (\rho - a)} \frac{(\log m)^\beta}{m^{\alpha+1}}.$$

Für ein ausreichend kleines  $\epsilon > 0$  gilt dann

$$A(z) - s_m\left(\frac{a_m}{a}z\right) = O(e^{-m\epsilon}(z - a)),$$

um das zu zeigen, betrachten wir

$$\begin{aligned} A(z) - s_m\left(\frac{a_m}{a}z\right) &= \int_a^z A'(t) - \frac{a_m}{a} s'_m\left(\frac{a_m}{a}t\right) dt \\ &= \int_a^z \left(r'_m(t) + (e^{J_m} - 1) s'_m(t)\right) + \left(e^{J_m} (s'_m(t) - s'_m\left(\frac{a_m}{a}t\right))\right) dt = O(e^{-m\epsilon}(z - a)) \end{aligned}$$

und die letzte Gleichung gilt, weil  $r'_m(z) \sim O(v/\rho)^m (\log m)^\beta m^{-1-\alpha}$  für jedes feste  $v < \rho$  und  $|z| < v$  gilt. Weiters gilt  $s'_m(t) - s'_m(a_m/a) \sim O(e^{J_m} - 1)$  wegen der Reihendarstellung von  $r_n$  und  $e^{J_m} - 1$  konvergiert exponentiell gegen Null. Mit

$$B(z) = C + D \left(1 + \frac{z}{\omega}\right)^\gamma \left(\log \frac{1}{1 - z/\omega}\right)^\delta (1 + o(1))$$

ergibt sich mit der Taylorreihenentwicklung von  $B(z)$  an  $A(z)$

$$B(A(z)) - B\left(s_m\left(\frac{a_m}{a}z\right)\right) = O\left(e^{-m\epsilon}(z - a)^\gamma \left(\log \frac{1}{z - a}\right)^\delta\right)$$

und durch Anwendung der Singularitätsanalyse

$$[z^n]B(A(z)) - B(s_m(a_m z/a)) = O\left(e^{-m\epsilon} \frac{1}{a^n} \frac{\log^\delta n}{n^{\gamma+1}}\right).$$

Weiters haben wir mit  $A(z) = A(a) + (z - a)A'(a) + o(z - a)$

$$[z^n]B(A(z)) \sim [z^n]D \left(\frac{A'(A)(z - a)}{\omega}\right)^\gamma \left(\log \frac{\omega}{A'(a)(z - a)}\right)^\delta = O\left(\frac{1}{a^n} \frac{\log^\delta n}{n^{\gamma+1}}\right)$$

und wir erhalten

$$1 - \frac{[z^n]B(s_m(a_m z/a))}{[z^n]B(A(z))} = O(e^{-m\epsilon}).$$

Die Aussage des Satzes folgt nun aus

$$[z^n]B(s_m(a_m z/a)) = \left(\frac{a}{a_m}\right)^n [z^n]B(s_m(z)).$$

□

**Satz 4.14.** *Für den superkritischen Fall verhalten sich Erwartungswert und Varianz der größten Komponenten wie*

$$\mathbb{E}(L_n) = \log_T n - (\alpha + 1) \log_T \log n + \beta \log_T \log \log n + O(1)$$

$$\mathbb{V}(L_n) = O(1)$$

mit  $T = \frac{\rho}{a} > 1$

*Beweis.* Es gilt wieder

$$\mathbb{E}(L_n) = \sum_{m=1}^n (1 - e^{-nJ_m}) = \sum_{m:nJ_m \geq 1} 1 + O(1)$$

und die letzte Gleichung folgt, weil  $J_m$  exponentiell fallend ist. Die Gleichung  $nJ_m \geq 1$  kann dann mit Hilfe einer sogenannten Bootstrap- Methode [6] iterativ gelöst werden. Um das zu zeigen, lösen wir

$$0 = \log(J_m n) = \log n + m \log(a/\rho) - (\alpha + 1) \log m + \log(\beta \log m) + O(1).$$

Nachdem die ersten beiden Terme weit größer als die anderen sind, ist  $m \sim \log_T n$  eine naheliegende erste Abschätzung. Einsetzen von  $m_1 = \log_T n$  in die Gleichung ergibt dann

$$-m_1 \log(a/\rho) - \log n = -(\alpha + 1) \log \log_T n + \log(\beta \log \log_T n)$$

Nachdem der letzte Term vernachlässigbar ist, ergibt sich als nächste Abschätzung

$$-m_2 \log(a/\rho) = \log n - (\alpha + 1) \log \log_T n + r_n$$

mit einem Restterm  $r_n$  von der Ordnung  $o(\log \log n)$  und damit ergibt der Logarithmus

$$\begin{aligned} (\alpha + 1) \log(m_2) &= \log(\log_T n - (\alpha + 1) \log_T \log n + r_n) \\ &= \log(\log_T n \left(1 - \frac{(\alpha + 1) \log_T \log n + r_n}{\log n}\right)) = \log_T \log n + O(1). \end{aligned}$$

Ebenso kann der letzte Term behandelt werden und ergibt

$$\log \beta \log m_2 = \log_T \beta \log \log n + O(1).$$

Damit erhalten wir  $r_n = \log_T \beta \log \log n + O(1)$ .

□

Die größte Komponente hat also in etwa die Größe  $\log n$ , also muss es auch viele kleine Komponenten geben. Wir können erwarten, dass deren Anzahl in etwa proportional zu  $n$  ist.

## 5 Untersuchungen der kleinsten Komponenten

Die meisten Studien zu dem Verhalten der kleinsten Komponenten beschränken sich auf Konstruktionen, deren äußere Funktion die Exponentialfunktion ist. Wir werden verschiedene Ansätze präsentieren, um hier zu Ergebnissen zu gelangen.

### 5.1 Kleinste Komponenten von exp-log Funktionen

Wir verwenden hier die Arbeit von Panario und Richmond [20]. Wir betrachten ebenso wie bei den größten Komponenten Konstruktionen mit erzeugender Funktion  $C(z) = e^{A(z)}$ , wobei  $A(z)$  in einem  $\Delta$ -Gebiet analytisch ist und für  $0 < \alpha < 1$  und  $a > 0$  an  $z \rightarrow \rho$  die Darstellung

$$A(z) = a \log \left( \frac{1}{1 - z/\rho} \right) + R(z)$$

hat, mit

$$R(z) = K + O \left( \left( 1 - \frac{z}{\rho} \right)^\alpha \right).$$

Wir bezeichnen nun für eine markierte Konstruktion der Größe  $n$  die Größe der  $r$ -kleinsten Komponente mit  $X_n^{(r)}$  und betrachten die Anzahl der Konstruktionen, für die  $X_n^{(r)} \geq m$  ist. Die exponentielle erzeugende Funktion für alle Konstruktionen aus Komponenten mit Größe mindestens  $m$  ist  $e^{r_m(z)} - 1$ . Die erzeugende Funktion für Konstruktionen aus genau  $i - 1$  Komponenten mit Größe  $< m$  und den restlichen Komponenten  $\geq m$  ist

$$\frac{s_m^{i-1}(z)}{(i-1)!} (e^{r_m(z)} - 1).$$

Bezeichnen wir nun die erzeugende Funktion der Komponenten mit  $X_n^{(r)} \geq m$  durch  $L_m^{(r)}$ , dann ergibt sich

$$L_m^{(r)}(z) = \left( 1 + s_m(z) + \frac{s_m^2(z)}{2!} + \dots + \frac{s_m^{r-1}(z)}{(r-1)!} \right) (e^{r_m(z)} - 1).$$

Wir verwenden wieder wie bei den größten Komponenten von exp-log Strukturen die Darstellung von  $r_m(z)$  durch das exponentielle Integral

$$E(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-v}}{v} dv$$

und können damit auch  $s_m$  darstellen. Wir erhalten dann die folgenden Ergebnisse:

**Satz 5.1.** *Für festgehaltenes  $m$  und  $n \rightarrow \infty$  gilt für die  $r$ -kleinsten Komponenten einer Klasse von markierten exp-log Konstruktionen mit dominanter Singularität  $\rho$*

$$\Pr(X_n^{(r)} \geq m) \sim e^{-s_m(\rho)} \left( 1 + s_m(\rho) + \frac{s_m^2(\rho)}{2!} + \dots + \frac{s_m^{r-1}(\rho)}{(r-1)!} \right)$$

Für  $m, n \rightarrow \infty$  gilt

$$\Pr(X_n^{(r)} \geq m) = f_a^{(r)} \left( \frac{m}{n} \right) + O \left( \frac{(\log m)^{r-1}}{m^{a+\alpha}} \right)$$

mit

$$f_a^{(r)} = \frac{e^K \Gamma(a)}{n^a} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} (e^{aE((m/n)h)} - 1) \left( 1 + s_m(\rho e^{-h/n}) + \dots + \frac{s_m^{r-1}(\rho e^{-h/n})}{(r-1)!} \right) dh.$$

Außerdem erfüllt

$$f_a^{(r)}\left(\frac{m}{n}\right) =: \frac{\omega_a^{(r)}(n/m)}{m^a}$$

die Abschätzung

$$\omega_a^{(r)} \leq c(\log m)^{r-1}.$$

Weiters gilt für  $n/m, m, n \rightarrow \infty$

$$\Pr(X_n^{(r)} \geq m) = \frac{e^{-a\gamma}}{m^a} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(K + a\gamma + a \log m)^j}{j!} \left( 1 + O\left(\frac{(\log m)^{r-1}}{m^{a+\alpha}}\right) + O(m/n) \right).$$

*Beweis.* (Idee): Wir erhalten die Wahrscheinlichkeit, dass die  $r$ -kleinste Komponenten größer als  $m$  ist, durch

$$\Pr(X_n^{(r)} \geq m) = \frac{[z^n]L_m^{(r)}(z)}{[z^n]C(z)}.$$

Um  $[z^n]L_m^{(r)}(z)$  zu bestimmen lässt sich wieder die Cauchysche Integralformel verwenden. Daraus ergibt sich direkt das erste Ergebnis.

Für  $m, n \rightarrow \infty$  verwenden wir für einen kreisförmigen Integrationsweg über  $z = e^{-h/n}$  mit  $h = 1 + in\phi$  ein Integral der Form

$$\begin{aligned} [z^n]L_m^{(r)}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1+ni\pi}^{1-ni\pi} \left( 1 + s_m(\rho e^{-h/n}) + \dots + \frac{s_m^{(r-1)}(\rho e^{-h/n})}{(r-1)!} \right) \\ &\quad \times \left( e^{r_m(\rho e^{-h/n})} - 1 \right) \left( -\frac{1}{n} \right) \frac{dh}{e^{-h}}. \end{aligned}$$

$r_m$  kann wie bereits bei den größten Komponenten durch das exponentielle Integral abgeschätzt werden und mit Hilfe der Asymptotik von  $A(z)$  auch  $s_m$ . Durch die Potenzreihenentwicklung des Exponentiellen Integrals und durch Taylorentwicklung von  $A(z)$  lässt sich sowohl  $e^{r_m}$  als auch  $\sum_{j=0}^{r-1} \frac{s_m^j}{j}$  abschätzen. Die Behauptung ergibt sich durch Ersetzen von  $e^{r_m(\rho e^{-h/n})} - 1$  durch  $e^{aE(mh)} - 1$  und Abschätzen des Fehlers.

Für  $n/m \rightarrow \infty$  lassen sich noch etwas genauere Abschätzungen mit Hilfe einer Hankel-Kontur mit Winkel  $\phi$  finden. Dann lässt sich die Differenz zwischen diesem Integral und dem vorher definierten abschätzen.  $\square$

**Satz 5.2.** *Das Verhalten der  $k$ -ten Momente von  $X_n$  ist von dem Verhältnis von  $k$  und  $a$  abhängig. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:*

1. Für  $k > a > 0$  gibt es eine positive Konstante  $c$ , so dass für das  $k$ -te Moment der  $r$ -kleinsten Komponenten gilt

$$\mathbb{E}^k(X_n^{(r)}) = \left( n^{k-a} \int_2^\infty x^{a-k-1} \omega_a^{(r)}(x) dx \right) (1 + O(n^{-c})).$$

2. Ist  $k = a$ , dann gilt

$$\mathbb{E}^k (X_n^{(r)}) = e^{-\gamma a} \frac{(\log n)^r}{r!} \left( 1 + O\left(\frac{h(n)}{\log n}\right) \right)$$

für eine Funktion  $h$  mit  $h(n) \rightarrow \infty$ .

3. Für  $k < a$  ist die Summe

$$\mathbb{E}^k (X_n^{(r)}) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{Pr}(X_n^{(r)} \geq m) ((m+1)^k - m^k)$$

beschränkt.

*Beweis.* 1. Für  $k > a$  lässt sich das  $k$ -te Moment als

$$\mathbb{E}^k (X_n^{(r)}) = \sum_{m=1}^{\infty} ((m+1)^k - m^k) \mathbf{Pr}(X_n^{(r)} \geq m)$$

schreiben und die Summe kann an einer zunächst beliebigen Funktion  $\delta(n)$  mit  $\delta(n) \rightarrow \infty$  geteilt werden. Man erhält dann aus  $\mathbf{Pr}(X_n^{(r)} \geq m) \leq c(\log m)^{r-1} m^{-a}$ , für  $m^k > \delta(n)^{k-a}$  die Abschätzung

$$\sum_{m=1}^{\delta(n)} = O((\log n)^{r-1} (n\delta(n))^{k-a}).$$

Die zweite Summe kann durch Substitution von  $u = m/n$  als Integral geschrieben folgendermaßen dargestellt werden

$$\sum_{\delta(n)}^n = \left( n^{k-a} \int_0^{1/2} u^{-a+k-1} \omega_a^{(r)} \left( \frac{1}{u} \right) du \right) (1 + O((\delta(n))^{-\alpha}))$$

Das Ergebnis folgt dann mit  $\delta(n)^{-\alpha} \sim n^{-\epsilon}$ .

2. Für  $a = k$  lässt sich der Bereich der Summation in der Form

$$\mathbb{E}^k (X_n^{(r)}) = \sum_{k=1}^{\delta(n)} + \sum_{k=\delta(n)}^{n\epsilon(n)} + \sum_{k=n\epsilon(n)}^{n/2}$$

mit  $\epsilon(n) \rightarrow 0$  und  $\delta(n) \rightarrow \infty$  aufteilen. Die erste Summe können wir wie bei  $k > a$  abschätzen und erhalten  $O((\log n)^{r-1})$ . Für die letzte Summe erhalten wir durch Abschätzung durch die harmonische Reihe und aus  $\omega_a(n/m) = O(\log m^{r-1})$

$$\begin{aligned} \sum_{m=n\epsilon(n)}^{n/2} ((m+1)^k - m^k) \mathbf{Pr}(S_n^{(r)} \geq m) &\leq \sum_{m=n\epsilon(n)}^{n/2} C m^{k-1} \frac{1}{m^k} \omega_a(m/n) \\ &= O(\log(n)^{r-1} (\log(\epsilon(n))). \end{aligned}$$

Die zweite Summe erfüllt  $\mathbf{Pr}(X_n^{(r)} \geq m) = O\left(\frac{e^{-a\gamma}}{m^a} (K + a\gamma + a \log m)^{r-1}\right)$  und damit

$$\sum_{m=\delta(n)}^{n\epsilon(n)} \frac{m^{k-1} (\log m)^{r-1}}{(r-1)! m^a} = \frac{n^{k-a} (\log n)^r}{r!} \left( 1 + O\left(\frac{\log(\epsilon(n))}{\log n}\right) \right).$$

Für passendes  $\epsilon(n)$  folgt daraus die Formel .

3. Für  $a > k$  verwenden wir die Asymptotik von  $\omega_a^r$  und Einsetzen in die Summe von oben. Dann ist

$$\sum_{m=0}^n \Pr(X_n^{(r)} \geq m) ((m+1)^k - m^k) \leq \sum_{m=0}^n \frac{(\log m)^{r-1}}{m^a} ((m+1)^k - m^k)$$

konvergent.

□

Wir können auch für Multimengen von unmarkierten Objekten eine Verteilung der kleinsten Komponenten erhalten.

**Satz 5.3.** Sei  $U_m^{(r)}$  die gewöhnliche erzeugende Funktion der Multimenge der exp-log Objekte, für deren  $r$ -kleinste Komponente  $X_n^{(r)} \geq m$  gilt. Dann hat  $U_m^{(r)}$  die Erzeugende Funktion

$$U_m^{(r)} = \left( \exp \left( r_m(z) + \frac{r_m(z^2)}{2} + \dots \right) - 1 \right) (1 + s_{m,1}(c) + \dots + s_{m,j}),$$

wobei  $s_{m,j}$  der Koeffizient von  $u^j$  in der erzeugende Funktion

$$\exp \left( u s_m(z) + u^2 \frac{s_m(z^2)}{2} + \dots \right)$$

ist

*Beweis.* Der Beweis funktioniert analog zu den markierten Objekten. □

Das analoge Ergebnis zu den Wahrscheinlichkeiten der markierten Objekte lautet nun ohne Beweis:

**Satz 5.4.** Für festgehaltenes  $m$  und  $n \rightarrow \infty$  gilt

$$\Pr(X_n^{(r)} \geq m) \sim \prod_{k=1}^{m-1} (1 - \rho^k)^{C_k} (1 + s_{m,1} + \dots + s_{m,r-1}).$$

Für  $m, n \rightarrow \infty$  gilt

$$\Pr(X_n^{(r)} \geq m) = g_a^{(r)} \left( \frac{m}{n} \right) + O \left( \frac{(\log m)^{r-1}}{m^{a+\alpha}} \right)$$

mit

$$g_a^{(r)}(u) = \frac{e^{-K} \Gamma(a)}{n^a} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} (e^{aE(uh)} - 1) \\ \times (1 + s_{m,1}(\rho e^{-h/n}) + \dots + s_{m,r-1}(\rho e^{-h/n})) e^h dh.$$

Ist  $m, n \rightarrow \infty$  und  $n/m \rightarrow \infty$ , so gilt auch

$$\Pr(X_n^{(r)} \geq m) = \left( \frac{e^{-a\gamma}}{m^a} \sum_{j=0}^{r-1} P^{(j)}(m) \right) \left( 1 + O \left( \frac{(\log m)^{r-1}}{m^a} \right) + O \left( \frac{m}{n} \right) \right),$$

wobei  $P^{(j)}(m)$  der  $j$ -te Koeffizient von  $u$  in

$$\exp \left( u(K + a\gamma + a \log m) + u^2 \frac{U(\rho^2)}{2} + u^3 \frac{U(\rho^3)}{3} + \dots \right)$$

und  $U(z)$  die erzeugende Funktion der Multimengen-Konstruktion ist.



**Definition 18.** Die Buchstab-Funktion ist durch

$$\omega(u) = \frac{1}{u}, 1 \leq u \leq 2$$

$$(u\omega(u))' = \omega(u-1), u \geq 2$$

definiert und beschreibt in der Zahlentheorie die Verteilung der kleinsten Primfaktoren.

Wir können noch zeigen, dass die Funktion  $\omega_a$  als eine Verallgemeinerung der Buchstab-Funktion gesehen werden kann. Um das zu sehen, können wir für  $a = r = 1$  die Laplace-Transformierte der Buchstab-Funktion betrachten. Diese ist durch

$$\mathcal{L}(\omega)(s) = e^{E(s)} - 1$$

gegeben, das ist beispielsweise in dem Buch von Tenenbaum [23] gezeigt und damit ergibt die inverse Laplace-Transformation

$$\omega(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} (e^{E(v)} - 1) e^{uv} dv.$$

Wir erhalten also für diesen Fall genau die Buchstab-Funktion.

Es gibt noch eine weitere Arbeit von Bender [5] zu den kleinsten Komponenten von exp-log Strukturen, die die Asymptotik als verallgemeinerte Buchstab-Funktion deutlicher macht. Wir betrachten wieder eine erzeugende Funktion der Form  $A(z) = e^{C(z)}$  bzw die Multimengen-Konstruktion im unmarkierten Fall. Weiters sei  $A_{n,m}$  die Anzahl der  $\mathcal{A}$ -Strukturen der Größe  $n$  ist, deren kleinste Komponente zumindest die Größe  $m$  hat. Für markierte Konstruktionen verwenden wir die exponentielle erzeugende Funktion, daher betrachten wir  $a_n := \frac{A_n}{n!}$ ,  $c_n := \frac{C_n}{n!}$  und  $a_{n,m} := \frac{A_{n,m}}{n!}$ . Für unmarkierte Konstruktionen sei  $a_n = A_n$ ,  $c_n = C_n$  und  $a_{n,m} = A_{n,m}$ .

**Definition 19.** Die verallgemeinerte Buchstab-Funktion ist für  $K > 0$  durch

$$\Omega_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 < u \leq 2 \\ 1 + K \int_2^x \frac{\Omega_K(t-1)}{t-1} dt & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

gegeben.

**Satz 5.5.** Sei  $\epsilon > 0$  konstant und  $R$  der Konvergenzradius von  $C(z)$

1. Wenn  $c_n \sim f(n)/(nR^n)$ , wobei die Funktion  $f$  die Asymptotik  $f(n) = o((f(\alpha n))^2)$  gleichmäßig für  $\epsilon \leq \alpha \leq 1 - \epsilon$  erfüllt, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_{n,m}} = \begin{cases} 1 & \text{für } 1/2 \leq m/n \leq 1 \\ 0 & \text{für } \epsilon \leq m/n \leq 1/2 - \epsilon \end{cases}$$

2. Ist  $c_n \sim f(n)/(nR^n)$  mit  $(f(\alpha n))^2 = o(f(n))$  gleichmäßig für  $\epsilon \leq \alpha \leq 1 - \epsilon$  dann gilt  $c_n/a_{n,m} \sim 1$  gleichmäßig für  $\epsilon \leq m/n \leq 1$ .
3. Ist  $c_n \sim K/(nR^n)$ , dann gilt  $c_n/a_{n,m} \sim 1/\Omega_k(n/m)$  gleichmäßig für  $\epsilon \leq m/n \leq 1$

Diese Ergebnisse beschreiben die Wahrscheinlichkeit, dass eine Konstruktion, deren kleinste Komponente die Größe mindestens  $m$  hat, aus genau einer Komponente besteht. Nachdem die Asymptotik für die Anzahl der Konstruktionen aus  $C$  und  $A$  bekannt ist, lässt sich daraus auch die Wahrscheinlichkeit, dass die kleinste Komponente zumindest Größe  $m$  hat, ableiten.

*Beweis. 1. Fall:* Für  $\epsilon \leq \beta \leq \gamma \leq 1 - \epsilon$  gilt  $f(n) = o(f(\beta n)f(\gamma n))$ . Betrachten wir nur alle Konstruktionen, die aus zwei Komponenten  $\geq m$  zusammengesetzt sind, dann erhalten wir die Abschätzung

$$\frac{a_{n,m}}{c_n} \geq \sum_{m \leq i < n/2} \frac{c_i c_{n-i}}{c_n}$$

und aus der Asymptotik für  $c_n$  und dem Verhalten von  $f(n)$  ergibt sich

$$\sim \sum_{m \leq i \leq n/2} \frac{f(i)f(n-i)n}{i(n-i)f(n)} = \sum_{m \leq i \leq n/2} \frac{n}{i(n-i)o(1)}$$

und der letzte Term ist unbeschränkt.

**2. und 3. Fall:** Wenn es nur eine kleinste Komponente gibt und diese  $\geq m$  ist, ist das eine untere Schranke für die Anzahl der Konstruktionen mit kleinster Komponente  $\geq m$ . Wir haben damit

$$\frac{a_{n,m}}{c_n} \geq 1 + \sum_{i=m}^{n/2} \frac{c_i a_{n-i,i+1}}{c_n}.$$

Andererseits können wir auch eine kleinste Komponente der Größe  $i \geq m$  festhalten und das direkte Produkt mit allen Konstruktionen der Größe  $n - 1$  mit kleinster Komponente  $\geq i$  bilden. Damit gilt

$$\frac{a_{n,m}}{c_n} \leq 1 + \sum_{i=m}^{n/2} \frac{c_i a_{n-i,i}}{c_n}.$$

Nach Feststellung dieser Schranken erfolgt nun die Induktion über  $k$  mit  $k \leq n/m < k + 1$ . Für  $m = n/2$  gilt  $a_{n,m} = c_n + c_m^2$ , nachdem jede Konstruktion dieser Art entweder genau eine oder zwei Komponenten hat. Wegen  $f(n/2)^2 = o(f(n))$  haben wir dann für den zweiten Fall  $a_{n,n/2}/c_n = 1 + o(1)$ . Ebenso ergibt sich dies aus der Asymptotik von  $c_n$  im dritten Fall. Damit ist die Behauptung für  $k = 2$  gezeigt.

Wenn nun  $a_{m,n} \sim c_n$  für  $1 \leq n/m \leq k$  gilt, haben wir wieder  $f(\beta n)f(\gamma n) = o(f(n))$  und damit erhalten wir

$$1 + \sum_{i=m}^{n/2} \frac{c_i a_{n-i,i+1}}{c_n} = 1 + \sum_{i=m}^{n/2} \frac{c_i c_{n-i}(1 + o(1))}{c_n} = 1 + \sum_{i=m}^{n/2} \frac{no(1)}{(n-i)i} = 1 + o(1).$$

Das selbe Argument funktioniert für die andere Richtung und damit ist die Behauptung gezeigt.

Wir betrachten nun den dritten Fall: Wir gehen nun davon aus, dass für  $1 \leq n/m \leq k$  die Beziehung  $c_n/a_{n,m} \sim 1/\Omega_k(n, m)$  gezeigt ist. Damit erhalten wir

$$1 + \sum_{i=m}^{n/2} \frac{c_i a_{n-i,i+1}}{c_n} \sim 1 + \sum_{i=m}^{n/2} \frac{c_i c_{n-i}}{c_n} \Omega_K \left( \frac{n-i}{i+1} \right)$$

$$\sim 1 + \sum_{i=m}^{n/2} \frac{Kn}{(n-i)(i+1)} \Omega_K \left( \frac{n-i}{i+1} \right)$$

und das Ergebnis folgt dann durch Abschätzen der Summe durch ein Integral.  $\square$

Es ist klar, dass jede exp-log Funktion die Voraussetzungen des dritten Falls erfüllt.

## 5.2 Kleinste Komponenten von exp(alg-log) Funktionen

Diese Ergebnisse stammen aus einem Artikel von Dong et al [8]. Wir betrachten wieder kombinatorische Objekte mit algebraisch-logarithmischer erzeugender Funktion, also ist die erzeugende Funktion  $C(z)$  in einem  $\Delta$ -Bereich analytisch und für  $z \rightarrow \rho$  gilt die Darstellung

$$A(z) = c + \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^\alpha \left(\log \frac{1}{1 - z/\rho}\right)^\beta (1 + o(1))$$

mit  $0 < \alpha < 1$  und beliebigem  $\beta \in \mathbb{C}$ . Wir werden Mengen von markierten Objekten bzw Multimengen von unmarkierten Objekten betrachten. Nachdem die vorigen Ausführungen  $\alpha = 0$  betrachtet haben, ist das die Fortsetzung von exp-log Strukturen auf allgemeinere Objekte. Wir benötigen zuerst die erzeugende Funktion von Konstruktionen, bei denen die Anzahl der Komponenten bestimmter Größen vorgegeben ist.

**Definition 20.** Wir verstehen unter einer Einschränkung des Komponentenspektrums eine Funktion  $S : J \rightarrow \mathbb{N}$ . Hier ist  $J$  eine Menge von Komponentengrößen und  $S(j)$  ist die Anzahl der Komponenten einer bestimmten Größe.

Wir betrachten zunächst Mengen von markierten Objekten. Wir haben eine Einschränkung  $S : J \rightarrow \mathbb{N}$  gegeben und schreiben  $A(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{z^k}{k!}$  für die exponentielle erzeugende Funktion der Komponenten und

$$A(z, J) = \sum_{j \in J} A_j \frac{z^j}{j!}$$

für die exponentielle erzeugende Funktion der eingeschränkten Komponenten. Durch Einsetzen in die Exponentialfunktion und Taylor-Entwicklung ergibt sich für die erzeugende Funktion der Mengenkonstruktion ohne Einschränkungen der Komponenten die Darstellung

$$L(z, \emptyset) = e^c + \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^\alpha \left(\log \frac{1}{1 - z/\rho}\right)^\beta (1 + o(1))$$

für  $z \rightarrow \rho$ . Daraus erhalten wir durch Singularitätsanalyse

$$[z^n]L(z, \emptyset) \sim \frac{de^c}{\Gamma(-\alpha)} \frac{(\ln n)^\beta}{\rho^{-n} n^{\alpha+1}}$$

Für die erzeugende Funktion der Objekte mit Einschränkungen gilt:

**Satz 5.6.** Die exponentielle erzeugende Funktion der Mengen von markierten Objekten mit Einschränkung  $S : J \rightarrow \mathbb{N}$  ist durch

$$L(z, S) = e^{A(z) - A(z, J)} \prod_{j \in J} \frac{A_j^{S(j)} z^{jS(j)}}{(j!)^{S(j)} S(j)!}$$

gegeben

*Beweis.* Die Komponenten mit Größen, die nicht in  $J$  enthalten sind, können beliebig kombiniert werden. Die erzeugende Funktion dieser Komponenten entspricht  $A(z) - A(z, J)$  und für die erzeugende Funktion von Mengen dieser Komponenten haben wir  $e^{A(z) - A(z, J)}$ . Für die Komponenten aus  $J$  sind für jedes  $j \in J$   $S(j)$  Komponenten mit Wiederholung zu wählen. Nachdem die Reihenfolge egal ist, haben diese die erzeugende Funktion  $\frac{A_j^{S(j)} z^{jS(j)}}{(j!)^{S(j)} S(j)!}$ . Damit ergibt sich die Behauptung.  $\square$

Wir führen zur Vereinfachung der Notation  $m := n - \sum_{j \in J} jS(j)$  ein. Dann haben wir das folgende Ergebnis für die Anzahl Objekte mit Einschränkung der Komponentenanzahl, wobei nur kleine Komponenten eingeschränkt sind

**Satz 5.7.** *Es sei  $j_0 := \max\{j \in J\} = O(m/\log m)$  und*

$$\sum_{j \in J} j^{-\alpha} (\log j)^\beta = o(m^{1-\alpha} (\log m)^{\beta-1})$$

dann gilt für  $m \rightarrow \infty$

$$[z^n]L(z, S) \sim de^c \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{(\log m)^\beta}{\rho^m m^{\alpha+1}} \prod_{j \in J} \left( \frac{A_j}{j!} \right)^{S(j)} \frac{1}{S(j)!}$$

*Beweis.* (Idee): Man betrachtet wieder eine Hankel-Kontur, diesmal mit äußerem Radius  $1 + 3 \log m/m$  und innerem Kreis um  $z - 1$  mit Radius  $1/m$ . Der Beweis erfolgt dann durch Anwenden der Cauchyschen Integralformel und Taylorentwicklung der verwendeten Funktion.  $\square$

Für die markierten Konstruktionen gilt dann mit der Bezeichnung

$$\mathbf{Pr}(S, n) := \frac{[z^n]L(z, S)}{[z^n]L(z, \emptyset)}$$

die Beziehung

$$\mathbf{Pr}(S, n) \sim \left( \frac{n}{m} \right) \left( \frac{\log m}{\log n} \right)^\beta \prod_{j \in J} \frac{1}{S(j)!} \left( \frac{A_j \rho^j}{j!} \right)^{S(j)} e^{-A_j \frac{\rho^j}{j!}}.$$

Wir bezeichnen die  $r$ -kleinste Komponentengröße der Strukturen mit Einschränkung  $S$  mit  $X_n^{(r)}(S)$  und die eingeschränkten Komponentengrößen  $\leq k$  mit  $d(k) = \sum_{j \in J \cap N_k} S(j)$  mit  $N_k = \{1, 2, \dots, k\}$ . Wir erhalten die folgende Asymptotik für die  $r$ -kleinsten Komponenten.

**Satz 5.8.** *Unter den Bedingungen des vorigen Satzes und  $r - d(k) = O(\log m)$  und  $k = o(m(\log m)^{\frac{1}{\alpha-1}})$  gilt für  $m \rightarrow \infty$*

$$\mathbf{Pr}(X_n^{(r)}(S) > k) \sim \mathbf{Pr}(S, n) \exp(-A(\rho, N_k \setminus J)) \sum_{j=0}^{r-1-d(k)} \frac{A^j(\rho, N_k \setminus J)}{j!}.$$

*Beweis.* Wir betrachten die modifizierte Einschränkung  $S^*$  so dass  $S^* : N_k \cup J \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $S^*(j) = S(j) \forall j \in J$  und für  $j \notin J$  so, dass insgesamt

$$\sum_{j \leq k} S^*(j) \leq r - 1$$

gilt. Diese Art der Einschränkung bewirkt also, dass es höchstens  $r - 1$  Komponenten mit Größe  $\leq k$  gibt.

$$\Pr(X_n^{(r)}(S) \geq k) = \sum_{S^*} \Pr(S^*, n)$$

Mit  $m^* = n - \sum_{j \in N_k \cup J} j S^*(j)$  und  $k = o(m/\ln m)$  ergibt sich  $m^* \sim m$ . Man kann zeigen, dass mit der Schranke für  $k$  die Abschätzung

$$\sum_{j \in N_k} \frac{(\log j)^\beta}{j^\alpha} = o(m^{1-\alpha} (\log m)^{\beta-1})$$

gilt und auch

$$\left(\frac{n}{m^*}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\log m^*}{\log n}\right)^\beta \sim \left(\frac{n}{m}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\log m}{\log n}\right)^\beta.$$

Damit erhalten wir aus der Asymptotik für  $\Pr(S^*, n)$

$$\begin{aligned} \Pr(X_n^{(r)}(S) > k) &\sim \sum_{S^*} \left(\frac{n}{m^*}\right)^{1+\alpha} \left(\frac{\log m^*}{\log n}\right)^\beta \rho^{n-m^*} e^{-A(\rho, J \cup N_k)} \prod_{j \in J \cup N_k} \frac{A_j^{S^*(j)}}{(j!)^{S^*(j)} S^*(j)!} \\ &\sim \Pr(S; n) \exp(-A(\rho, N_k \setminus J)) \sum_{S^*} \left( \prod_{j \in N_k \setminus J} \frac{A_j^{S^*(j)} \rho^{j S^*(j)}}{(j!)^{S^*(j)} S^*(j)!} \right). \end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich dann aus der Multinomialformel

$$(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k)^j = j! \sum_{a_1 + \dots + a_k = j} \prod_{i=1}^k \frac{Y_i^{a_i}}{a_i!},$$

nachdem ja  $S^*$  alle Werte mit Komponentenanzahl kleiner als  $r$  annimmt. □

Bei den unmarkierten Objekten betrachten wir die gewöhnliche erzeugende Funktion  $A(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k$  für Objekte, die durch die Multimengen-Konstruktion erzeugt werden. Es muss  $\rho < 1$  gelten und die Erzeugende Funktion für diese Konstruktion ist dann

$$U(z) = \exp\left(A(z) + \frac{1}{2}A(z^2) + \dots\right).$$

Wir haben das folgende Ergebnis für die Erzeugende Funktion von Objekten mit eingeschränkten Komponentenzahlen:

**Satz 5.9.** *Sei  $S : J \rightarrow \mathbb{N}$  eine Einschränkung, dann erfüllt die erzeugende Funktion der Multimengen von unmarkierten Objekten mit Einschränkung  $S$*

$$U(z, S) = \left( \prod_{j \in J} (1-z)^{A_j} \binom{A_j + S(j) - 1}{S(j)} z^{j S(j)} \right) \exp\left(A(z) + \frac{A(z^2)}{2} + \dots\right).$$

*Beweis.* Es wurde bereits gezeigt, dass für die erzeugende Funktion einer Multimenge von Objekten aus  $\mathcal{A}$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-z^k}\right)^{A_k} = \exp\left(A(z) + \frac{A(z^2)}{2} + \dots\right)$$

gilt. Für alle  $j \notin J$  werden die Elemente der Größe  $j$  auf die selbe Weise ausgewählt wie ohne Einschränkung. Für jedes  $j \in J$  ersetzen wir den Faktor  $(1 - z^j)^{-A_j}$ . Die Anzahl der Möglichkeiten der Wahl von  $S(j)$  Komponenten der Größe  $j$  entspricht einer Ziehung mit Zurücklegen und ist daher  $\binom{A_j + S(j) - 1}{S(j)}$ . Der Faktor  $(1 - z^j)^{A_j}$  hebt den inversen Faktor in der Exponentialfunktion auf und daher haben wir die Behauptung.  $\square$

Wir können die erzeugende Funktion ohne Einschränkung in den Komponentenanzahlen bekanntlich in der Form

$$U(z, \emptyset) = \exp(A(z) + r_0(z))(1 + o(1))$$

mit

$$r_0(z) := \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A(z^k)}{k}$$

schreiben, wobei  $r_0(z)$  wohldefiniert und analytisch ist. Damit können wir ein analoges Ergebnis für Multimengen erhalten.

**Satz 5.10.** *Sei  $S : J \rightarrow \mathbb{N}$  eine Einschränkung mit  $j_0 = \max\{j \in J\} = O(m/\log m)$  und*

$$\sum_{j \in J} j^{-\alpha} (\log j)^\beta = o(m^{1-\alpha} (\log m)^{\beta-1}).$$

Dann gilt für  $m \rightarrow \infty$

$$[z^n]U(z, S) \sim de^{c+r_0(\rho)} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{(\log m)^\beta}{\rho^m m^{\alpha+1}} \prod_{j \in J} \binom{A_j + S(j) - 1}{S(j)} \prod_{j \in J} (1 - \rho^j)^{A_j}.$$

*Beweis.* Analog zum markierten Fall.  $\square$

Ebenso ergibt sich für die Wahrscheinlichkeiten der kleinsten Komponenten

$$\Pr(S, n) \sim \left(\frac{n}{m}\right)^{1+\alpha} \left(\frac{\log m}{\log n}\right)^\beta \prod_{j \in J} \binom{A_j + S(j) - 1}{S(j)} \rho^{jS(j)} (1 - \rho^j)^{A_j}.$$

Für das Verhalten der  $r$ -kleinsten Komponente gilt:

**Satz 5.11.** *Für die Bedingungen der vorigen Sätze und  $r - d(k) = O(\ln m)$  und  $k = o(m(\log m)^{\frac{1}{\alpha-1}})$  gilt für  $m \rightarrow \infty$*

$$\begin{aligned} \Pr(X_n^{(r)}(S) > k) &\sim \Pr(S, n) \exp\left(-\sum_{l=1}^{\infty} \frac{A(\rho^l, N_k \setminus J)}{l}\right) \\ &\times \sum_{j=0}^{r-1-d(k)} [z^j] \exp\left(zA(\rho, N_k \setminus J) + z^2 \frac{A(\rho^2, N_k \setminus J)}{2} + \dots\right). \end{aligned}$$

*Beweis.* Der Ansatz ist wieder analog zum markierten Fall. Wir definieren wieder  $S^*$  als die erweiterte Einschränkung und erhalten

$$\Pr(X_n^{(r)}(S) > k) \sim \sum_{S^*} \left(\frac{n}{m^*}\right)^{\alpha+1} \left(\frac{\log m^*}{\log n}\right)^\beta \prod_{j \in J \cup N_k} \binom{A_j + S^*(j) - 1}{S^*(j)} (1 - \rho^j)^{A_j} \rho^{n-m^*}$$

$$\sim \mathbf{Pr}(S, n) \prod_{j \in N_k \setminus J} (1 - \rho^j)^{A_j} \sum_{S^*} \prod_{j \in N_k \setminus J} \binom{A_j + S^*(j) - 1}{S^*(j)} \rho^{j S^*(j)}.$$

Wegen

$$(1 - \rho^i z)^{-A_i} = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{A_i + l - 1}{l} \rho^{il} z^l$$

gilt wieder, weil  $S^*$  alle möglichen Kombinationen von höchstens  $r$  kleinsten Komponenten abdeckt

$$\begin{aligned} \sum_{S^*} \prod_{j \in N_k \setminus J} \binom{A_j + S^*(j) - 1}{S^*(j)} \rho^{j S^*(j)} &= \sum_{u=0}^{r-1-d(k)} [z^u] \prod_{j \in N_k \setminus J} (1 - \rho^j z)^{-A_j} \\ &= \sum_{u=0}^{r-1-d(k)} [z^u] \exp \left( - \sum_{j \in N_k \setminus J} A_j \log(1 - \rho^j z) \right) \\ &= \sum_{u=0}^{r-1-d(k)} [z^u] \exp \left( z(A(\rho, N_k) - A(\rho, J \cap N_k)) + z^2 \frac{(A(\rho, N_k) - A(\rho, J \cap N_k))}{2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Die Formel ergibt sich dann, indem das Produkt vor der Summe mit der üblichen exp-log Umformung durch

$$\prod_{j \in N_k \setminus J} (1 - \rho^j)^{A_j} = \exp \left( - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{A(\rho^l, N_k \setminus J)}{l} \right)$$

geschrieben wird. □

Wenn wir  $\hat{d} := \sum_{j \in J} S(j)$  schreiben, dann können wir insbesondere den Erwartungswert für die  $\hat{d}+1$ -kleinste Komponente berechnen, also den Erwartungswert für die kleinste nichtvorgeschriebene Komponente.

**Satz 5.12.** *Sei  $S : J \rightarrow \mathbb{N}$  eine Einschränkung und gelte  $j_0 = \max\{j \in J\} = o(m(\log m)^{\frac{1}{\alpha-1}})$  und weiters*

$$\sum_{j \in J} \frac{(\ln j)^\beta}{j^\alpha} = o(m^{1-\alpha} (\ln m)^{\beta-1}).$$

*Es gilt für markierte Konstruktionen*

$$\mathbb{E}(X_n^{(\hat{d}+1)}(S)) \sim \mathbf{Pr}(S, n) m e^{-c+A(\rho, J)}$$

*und für unmarkierte Konstrukte folgt*

$$\mathbb{E}(X_n^{(\hat{d}+1)}(S)) \sim \mathbf{Pr}(S, n) m e^{-c-r_0} \prod_{j \in J} (1 - \rho^j)^{-A_j}.$$

*Beweis.* Wir betrachten markierte Konstruktionen und hier die Summe

$$\mathbb{E}(X_n^{(r)}(S)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{Pr}(X_n^{(r)}(S) > k).$$

Die Anzahl der Objekte mit genau  $\hat{d} + 1$  Komponenten entspricht der Anzahl aller eingeschränkten Komponenten zusammen mit einer Komponente der Größe  $m$ . Die Wahrscheinlichkeit dafür im Verhältnis zu den uneingeschränkten Strukturen dieser Größe lässt sich als

$$\begin{aligned} \Pr(X_n^{(\hat{d}+1)}(S) = m) &= \frac{A_m/m!}{[z^n]A(z)} \prod_{j \in J} \left( \frac{A_j}{j!} \right)^{S(j)} \frac{1}{S(j)!} \\ &= \rho^{n-m} e^{-c} \left( \frac{n}{m} \right)^{1+\alpha} \left( \frac{\log m}{\log n} \right)^\beta \prod_{j \in J} \left( \frac{A_j}{j!} \right)^{S(j)} \frac{1}{S(j)!} (1 + o(1)) \\ &\sim \Pr(S, n) e^{-c} \exp(A(\rho, J)) \end{aligned}$$

schreiben. Wir betrachten nun Konstruktionen mit mehr Komponenten. Es gilt offensichtlich für  $k < m$

$$\Pr(X_n^{(\hat{d}+1)}(S) > k) \geq \Pr(X_n^{(\hat{d}+1)}(S) = m).$$

Um die andere Richtung zu zeigen, betrachten wir

$$t = \max(j_0 + 1, m(\log m)^{2/(\alpha-1)})$$

Damit ist  $t$  größer als die kleinste festgeschriebene Komponente und damit gilt  $A(\rho, N_t \setminus J) = A(\rho, N_t) - A(\rho, J)$  und es ergibt sich aus dem Satz

$$\Pr(X_n^{(\hat{d}+1)} > t) \sim \Pr(S, n) e^{-c} \exp(A(\rho, J)).$$

Damit gilt aber für alle  $k$  mit  $t \leq k \leq m$

$$\Pr(S, n) e^{-c} \exp(A(\rho, J)) \geq \Pr(X_n^{(\hat{d}+1)} > k) \geq \Pr(S, n) e^{-c} \exp(A(\rho, J))$$

Nun können wir die Summe aufspalten in

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(X_n^{(\hat{d}+1)}(S) > k) &= \sum_{k=0}^{t-1} \Pr(X_n^{(\hat{d}+1)}(S) > k) + \sum_{k=t}^m \Pr(X_n^{(\hat{d}+1)}(S) > k) \\ &= O(t \Pr(S, n)) + m \Pr(S, n) \exp(-c + A(\rho, J))(1 + o(1)) \end{aligned}$$

und wegen  $t = o(m(\log m)^{1/(\alpha-1)})$  ist der erste Term vernachlässigbar und es folgt die Behauptung für den markierten Fall. Der unmarkierte Fall lässt sich analog mit den entsprechenden Ergebnissen für unmarkierte Strukturen behandeln.  $\square$

Insbesondere gilt dann für den Erwartungswert der kleinsten Komponente von Konstruktionen ohne Einschränkung im markierten Fall

$$\mathbb{E}(X_n^{(1)}) \sim n e^{-c}$$

und im unmarkierten Fall

$$\mathbb{E}(X_n^{(1)}) \sim n e^{-c-r_0}.$$

Diese Resultate sind nur für das erste Moment und die kleinste nicht festgeschriebene Komponentengröße, also um einiges weniger allgemein als für exp-log Strukturen. Es gibt auch Ergebnisse für Strukturen mit negativem algebraischen Exponenten die eine Sattelpunktmethode benutzt. Hier erhalten wir ohne Beweis



**Satz 5.13.** *Es sei  $A(z) = \sigma + c(1 - z/\rho)^{-p-1}(1 + o(1))$  für  $p > -1$ . Dann gilt*

$$\mathbb{E}(X_n^{(1)}) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-A(\rho, N_k))$$

*für markierte Strukturen und*

$$\mathbb{E}(X_n^{(1)}) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\sum_l A(\rho^l, N_k)/l)$$

*für unmarkierte Strukturen, wobei  $A(\rho, N_k) \sim k^p$  gilt.*

### 5.3 Glatte superkritische Strukturen

In der Arbeit von Bender und Gao [4] zu den Komponentengrößen von superkritischen Strukturen sind Anforderungen an die beteiligten Funktionen etwas anders.

**Definition 21.** Eine Struktur mit Erzeugender Funktion  $C(z) = B(A(z))$  heißt glatte superkritische Konstruktion, wenn gilt:

1. Es gibt ein  $0 < r < \rho(A)$ , so dass  $A(r) = \tau$ , wobei  $\tau$  die Singularität von  $B(z)$  ist (also die übliche Bedingung für superkritische Funktionen)
2. Es gibt eine Konstante  $\delta > 0$ , so dass  $c_n/c_{n+t} \rightarrow r^t$  für  $t \leq n^\delta$
3. Ist  $g_{n,k} = [z^n]B^{(k)}(A(z))$ , dann gilt  $g_{n,k}/g_{n+1,k} \sim r$

Einerseits sind diese Bedingungen weiter gefasst, weil die erzeugenden Funktionen nicht algebraisch-logarithmisch sein müssen, andererseits ist aus dieser Definition nicht offensichtlich, dass die bisher verwendeten superkritischen Konstruktionen auch glatt sind. Das spätere hinreichende Kriterium zeigt aber, dass alle superkritischen Funktionen vom alg-log Typ auch glatte superkritische Funktionen sind. Die Autoren haben das Verhalten einer Anzahl von Eigenschaften bewiesen, darunter das der größten und kleinsten Komponenten, der Anzahl der Komponenten und der Vielfachheit. Wir haben das Verhalten der größten Komponenten bereits behandelt und werden die Anzahl der Komponenten später behandeln, daher interessieren wir uns besonders für das Verhalten der kleinsten Komponenten. Der Artikel zeigt auch, dass sich die Komponenten fixer Größen wie unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariablen verhalten und wir werden auch diesen Beweis skizzieren.

Wir nehmen an, dass sich die Koeffizienten von  $A(z)$  für eine Konstante  $\beta$  wie  $a_j \sim e^{g(j)}\beta^{-j}$  mit  $g'(x) = o(1)$  für  $x \rightarrow \infty$  verhalten. Dann definieren wir für  $\alpha := \beta/r$  die Funktion  $\sigma(n)$  implizit durch

$$\sigma(n) = \frac{\log(n/A'(r)) + g(\sigma(n))}{\log \alpha}.$$

**Definition 22.** Für zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $P, Q$  auf einer diskreten Menge  $X$  ist der Totalvariationsabstand durch

$$d_{TV}(P, Q) = \sup_{A \subset X} |P(A) - Q(A)|$$

gegeben.

Insbesondere gilt

$$d_{TV}(P, Q) = \sum_{x \in X} ((\Pr(P = x) - \Pr(Q = x))^+ = \sum_{x \in X} (|\Pr(P = x) - \Pr(Q = x)|)/2$$

mit  $x^+ = \max(x, 0)$ .

**Satz 5.14.** *Wir bezeichnen die Anzahl der Koeffizienten der Größe  $j$  mit  $\zeta_j$ . Es gibt eine Funktion  $\omega(n) \rightarrow \infty$ , so dass die Zufallsvariablen  $\zeta_j$  für*

$$\sigma(n) - \omega(n) \leq j \leq n$$

*asymptotisch unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert  $\alpha^{\sigma(n)-j}$  sind.*

Wir verwenden dafür den folgenden Zusammenhang

**Lemma 2.** *Seien  $\zeta_1(n), \dots, \zeta_n(n)$  eine Menge von Zufallsvariablen mit Wertebereich in  $\mathbb{Z}_+$  und es sei mit  $(m)_k := (m(m-1)\dots(m-k+1))$  eine Folge  $\sigma(n) \in \mathbb{R}_+$  und Konstanten  $\alpha > 1$  und  $0 < c < 1$  gegeben, die die folgenden Bedingungen erfüllen*

1.  $\sigma(n) \rightarrow \infty$  und  $n - \sigma(n) \rightarrow \infty$
2. Für festes  $l$  und Folgen  $m_1, \dots, m_l$  und  $k_1(n), \dots, k_l(n)$  mit  $|k_i(n) - \sigma(n)| = O(1)$  gilt

$$\mathbb{E}((\zeta_{k_1(n)})_{m_1}, (\zeta_{k_2(n)})_{m_2}, \dots, (\zeta_{k_l(n)})_{m_l}) \sim \prod_{j=1}^l \alpha^{(\sigma(n)-k_j(n))m_j}$$

3. Es gilt  $\Pr(\zeta_{k(n)} > 0) = O(c^{k(n)-\sigma(n)})$  gleichmäßig für alle  $k > \sigma(n)$ .

*Dann gibt es eine Funktion  $\omega$  mit  $\omega(n) \rightarrow \infty$ , so dass für  $k = \lfloor \sigma(n) - \omega(n) \rfloor$ , so dass für unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariablen  $Z_j(n)$  mit  $\mathbb{E}(Z_j) = \alpha^{\sigma(n)-j}$*

$$d_{TV}((\zeta_k, \dots, \zeta_n), (Z_k, \dots, Z_n)) \rightarrow 0$$

*gilt.*

*Beweis.* (des Satzes, Idee) Es ist zu zeigen, dass die Bedingungen für die Konvergenz gegen eine Poisson-Verteilung erfüllt sind.

Wenn wir einen fixen Komponentenvektor  $L_1, \dots, L_k$  mit Gesamtkomponentengröße  $s$  und beliebige unmarkierte Konstruktionen mit  $m$  Komponenten betrachten, die diese Folge von Komponenten erhalten, dann gibt es  $\binom{m}{k}$  Möglichkeiten, diese anzuordnen. Damit ist die erzeugende Funktion der Strukturen mit dieser festen Sequenz durch  $H(x) = x^s \sum_m c_m \binom{m}{k} A(x)^{m-k} = x^s B^{(k)}(A(x))/k!$  gegeben. Es gilt auch  $[x^n]B^{(k)}(A(x)) \sim \left(\frac{n}{rA'(r)}\right)^k$ , daher erhalten wir auch  $[z^n]H(z) \sim \frac{1}{k!} \left(\frac{n-s}{rA'(r)}\right)^k c_{n-s}$ . Nachdem  $s$  klein ist, lässt sich die erzeugende Funktion der Strukturen mit diesen Komponenten durch

$$[z^n]H(z) \sim c_n \frac{(n/A'(r))^k r^s}{k!}$$

bestimmen. Wir betrachten nun eine Folge von Komponentengrößen  $k_1(n) < \dots < k_l(n)$  mit  $k_i(n) = \sigma(n) + O(1)$  und  $m = \sum_{i=1}^l m_i$ . Wenn man nun alle Möglichkeiten betrachtet,

eine Folge wie vorhin zu konstruieren, dann kommt zusätzlich der Faktor  $m!a_k^{m_i}$  dazu und daraus ergibt sich dann die zweite Bedingung. Für markierte Konstruktionen funktioniert ein ähnliches Argument.

Die erzeugende Funktion aller Funktionen, die ein Element der Größe  $\zeta_k$  enthalten, kann nach oben durch die erzeugende Funktion aller Strukturen, in die ein Element der Größe  $k$  eingefügt wird, abgeschätzt werden und daraus erhalten wir die dritte Bedingung.  $\square$

Als nächstes wollen wir zeigen, dass jede glatte superkritische Struktur eine große Anzahl kleiner Komponenten besitzt:

**Satz 5.15.** *Es sei  $j = O(\log n)$  und wir bezeichnen die Anzahl der Komponenten der Größe  $j$  mit  $\zeta_j$ . Dann gibt es für festes  $k$  Konstanten  $B > 0$  und  $D > 1$ , so dass*

$$\Pr(\zeta_j < k) \leq B (D^{-n} + (nr^j a_j)^{-k}) \rightarrow 0$$

*gilt. Weiters gilt für eine Funktion  $f(n) \rightarrow \infty$*

$$\Pr\left(\bigcup_{j < \sigma(n) - f(n)} (\zeta_j < k)\right) \leq \sum_{j < \sigma(n) - f(n)} \Pr(\zeta_j < k) = o(1).$$

*Beweis.* Sei  $\lambda$  der kleinste Index, für den  $a_\lambda > 0$  gilt. Wir betrachten für  $\lambda < j < \sigma(n) - \omega(n)$  die Anzahl der Strukturen mit  $\zeta_j < k$ . Wenn nun eine Struktur mit  $\zeta_\lambda \geq \delta n$  gegeben ist, dann kann diese zu einer Struktur mit  $\zeta_j > k$  gemacht werden, indem  $k$  Komponenten der Größe  $\lambda$  durch Komponenten der Größe  $j$  ersetzt werden.

Wir wollen zuerst zeigen, dass der Anteil der Strukturen mit  $\zeta_\lambda < \delta n = O(D^{-n})$  für eine Konstante  $D > 1$  ist. Dafür betrachten wir die bivariate erzeugende Funktion  $B(ta_\lambda z^\lambda + (A(z) - a_\lambda z^\lambda))$ . Sei  $r(t)$  der Konvergenzradius von  $ta_\lambda z^\lambda + (A(z) - a_\lambda z^\lambda)$ , dann gibt es ein  $t_0 < 1$ , so dass  $ta_\lambda z^\lambda + (A(z) - a_\lambda z^\lambda) = \rho(B)$  eine eindeutige (monoton fallende) Lösung  $r(t)$  für alle  $t > t_0$  hat. Es gibt also auch für jedes feste  $t$  ein  $\epsilon > 0$  mit

$$\frac{r(t) - \epsilon}{r + \epsilon} > 1.$$

Es gilt aber auch  $[x^n]B(ta_\lambda z^\lambda + (A(z) - a_\lambda z^\lambda)) \leq C(r(t) - \epsilon)^{-n}$  und eine untere Schranke der Anzahl der Strukturen der Größe  $n$  ist  $C(r + \epsilon)^{-n}$ . Die Anzahl der Strukturen mit  $C_1 n$  Komponenten der Größe  $\lambda$  ist durch  $[x^{n t^{C_1 n}}]B(ta_\lambda z^\lambda + (A(z) - a_\lambda z^\lambda))$  gegeben. Damit ist

$$\frac{t^{-C_1 n} C(r(t) - \epsilon)^{-n}}{C(r + \epsilon)^{-n}}$$

wegen  $t < 1$  eine obere Schranke des Anteils der Strukturen mit höchstens  $C_1 n$  Komponenten. Damit können wir ein  $C_1 > 0$  ausreichend klein wählen, so dass der letzte Bruch  $< 1$  ist. Damit wird aber auch der Anteil der Strukturen mit weniger als  $C_1 n$  Elementen der Größe  $\lambda$  klein.

Bei der Ersetzung gibt es  $\binom{\delta n}{k}$  Möglichkeiten, die zu ersetzenden Komponenten auszuwählen und nachdem die ursprüngliche Struktur bereits bis zu  $k - 1$  Komponenten der Größe  $j$  hatte, gibt es  $\binom{2k-1}{k}$  Möglichkeiten, welche dieser durch Ersetzen entstanden sind. Die Struktur nach dem Ersetzen hat die Größe  $n + k(j - \lambda)$  und daraus erhalten wir

$$\Pr(\zeta_j < k) \leq \Pr(\zeta_\lambda < \delta n) + \frac{c_{n+k(j-\lambda)}}{c_n} \frac{\binom{2k-1}{k} a_\lambda}{\binom{\delta n}{k} a_j}.$$

Nachdem die letzten beiden Brüche bekannt sind, erhalten wir das Ergebnis durch Summation über  $j$  zusammen mit dem Verhalten der Koeffizienten der erzeugenden Funktionen.  $\square$

Wegen des folgenden Ergebnisses erfüllen viele superkritische Strukturen auch die Glattheitsbedingung.

**Satz 5.16.** *Eine glatte superkritische Struktur liegt vor, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Es gibt ein  $0 < r < \rho(A)$ , so dass  $A(r) = \tau$ , wobei  $\tau$  die Singularität von  $B(z)$  ist.*
2.  $\text{ggT}((i - j) : a_i a_j \neq 0) = 1$
3. *Es gibt  $\epsilon > 0$  und  $K = \{k_1 < k_2 \dots\}$  mit*

$$k_{i+1} - k_i = O(k_i^{1-\epsilon})$$

$$b_k \leq \exp(O(k^{1-\epsilon}))\rho(B)^{-k} \quad \forall k$$

$$b_k \geq \exp(-O(k^{1-\epsilon}))\rho(B)^{-k} \quad \forall k$$

*Beweis.* (Idee) Gesucht ist das Verhalten von

$$c_n = [z^n]B(A(z)) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k [z^n]A(z)^k.$$

Es folgt aus einer asymptotischen Darstellung von  $A(x)^k$  für  $k$  in einer bestimmten Umgebung gleichmäßig

$$\frac{b_k [x^n](A(x))^k}{b_k [x^{n+t}](A(x))^k} \sim r^t$$

und die Summe von  $c_n$  außerhalb dieses Bereichs ist vernachlässigbar. Die dritte Glattheitsbedingung ist mit einem ähnlichen Argument in [9] gezeigt.  $\square$

Für superkritische Funktionen mit einer äußeren alg-log Funktion ist diese Voraussetzung immer erfüllt, weil dann  $b_k \sim n^{1-\alpha}\rho^{-n}(\log n)^\beta$  gilt. Zuletzt noch ohne Beweis ein stärkeres Resultat über kleine Komponenten und Vielfachheiten:

**Definition 23.** Eine Struktur heißt lückenlos, wenn sie jede Komponentengröße zwischen der größten Komponente und 1 besitzt.

**Satz 5.17.** *Es gilt für die Wahrscheinlichkeit  $g_n$ , dass eine Struktur der Größe  $n$  lückenlos,  $g_n \sim b_m$  mit  $m := \frac{\alpha^{\sigma(n)-1}}{\alpha-1}$  und*

$$b_m = \sum_{k=0}^{m-1} b_k \binom{m}{k} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{m-k},$$

*beziehungsweise gilt für die Wahrscheinlichkeit  $q_n$ , dass eine Struktur lückenlos ist mit größter Komponente  $k$*

$$q_n \sim \exp\left(\frac{-\alpha^{\sigma(n)-k}}{\alpha-1}\right) \prod_{j \leq k} (1 - \exp(-\alpha^{\sigma(n)-j}))$$

Die Anzahl  $D_n(k)$  der verschiedenen Komponenten, die genau  $k$  mal vorkommen, erhalten wir mit  $P_k(x) := \sum_{l \neq 0} \Gamma(k + 2i\pi l) \exp(-2il\pi x)$  durch

$$\mathbb{E}(D_k) = \frac{P_k(\sigma(n))}{k!} + \frac{1}{k} + o(1)$$

Superkritische Strukturen enthalten also kleine Komponenten aller Größen und die Wahrscheinlichkeit, dass eine Struktur, die eine Komponente einer Größe  $k$  enthält, auch alle Komponentengrößen kleiner als  $k$  enthält, ist nach unten beschränkt.

## 6 Untersuchungen über die Anzahl der Komponenten

Die letzte Kenngröße der Verteilung der Komponentengrößen ist die Anzahl der Komponenten. Hier gibt es recht viele und allgemeine Ergebnisse, diese stammen vor allem aus dem Buch 'Analytic Combinatorics' [13]. Wir betrachten wie immer Konstruktionen, deren erzeugende Funktion die Form  $C(z) = B(A(z))$  besitzt und verwenden die bivariate erzeugende Funktion

$$C(z, u) = B(uA(z)).$$

Durch  $[z^n u^k]C(z, u)$  ist die Anzahl der Konstruktionen der Größe  $n$  mit genau  $k$  Komponenten gegeben und der Erwartungswert der Anzahl der Komponenten erfüllt

$$[z^n] \sum_{k=1}^n k[u^k]C(z, u) = [z^n] \frac{\delta}{\delta u} C(z, u) \Big|_{u=1}.$$

**Definition 24.** Ist  $\mu$  ein endliches Maß auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ , dann ist

$$\phi_\mu(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x)$$

die zugehörige charakteristische Funktion. Für eine Zufallsvariable  $X$  ist die charakteristische Funktion durch

$$\mathbb{E}(\exp(itX))$$

gegeben. Die momenterzeugende Funktion ist  $\mathbb{E}(tX)$ .

**Definition 25.** Eine Folge von Maßen  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert schwach gegen ein Maß  $\mu$ , wenn für jede beschränkte, stetige Funktion  $f$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu$$

gilt. Eine Folge von Zufallsvariablen konvergiert in der Verteilung gegen eine Zufallsvariable  $X$ , wenn die zugehörigen Verteilungsfunktionen schwach gegen die Verteilungsfunktion von  $X$  konvergieren. Wir schreiben dann auch  $X_n \rightarrow_d X$ .

**Satz 6.1** (Stetigkeitssatz von Lévy). *Eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen  $P_i$  konvergiert genau dann schwach gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  mit charakteristischer Funktion  $\phi$ , wenn die charakteristischen Funktionen  $\phi_i$  punktweise gegen eine bei 0 stetige Funktion  $\phi$  konvergieren*

Der folgende Satz [13] beweist die Konvergenz von Zufallsvariablen gegen eine Normalverteilung und wir werden ihn später mehrfach verwenden.

**Satz 6.2** (Quasi-Powers). *Sei  $X_n$  eine Folge nichtnegativer Zufallsvariablen mit wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen  $p_n(u)$ , so dass es für eine Umgebung um  $u = 1$  Folgen  $\beta_n, \kappa_n \rightarrow \infty$  und analytische Funktionen  $A(u), B(u)$  mit  $A(1) = B(1) = 1$  gibt, die*

$$B''(1) + B'(1) - B'(1)^2 \neq 0$$

erfüllen, so dass

$$p_n(u) = A(u)B(u)^{\beta_n} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\kappa_n}\right) \right)$$

gilt. Dann erfüllen Erwartungswert und Varianz von  $X_n$

$$\mathbb{E}(X_n) = \beta_n B'(1) + A'(1) + O\left(\frac{1}{\kappa_n}\right)$$

$$\mathbb{V}(X_n) = \beta_n v(B) + v(A) + O\left(\frac{1}{\kappa_n}\right),$$

mit  $v(C) := C''(1) + C'(1) - (C'(1))^2$ . Die normierte Verteilung von  $X_n$  asymptotisch normalverteilt und erfüllt

$$\Pr\left(\frac{X_n - \mathbb{E}(X_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_n)}} \leq x\right) = \phi(x) + O\left(\frac{1}{\kappa_n} + \frac{1}{\sqrt{\beta_n}}\right),$$

wobei  $\phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

*Beweis.* Die momenterzeugende Funktion erfüllt die Bedingungen der Version für momenterzeugende Funktionen  $\square$

Wir benötigen noch die Berry-Esseen-Ungleichung für die Konvergenzgeschwindigkeit gegen die Verteilungsfunktion:

**Satz 6.3** (Berry-Esseen). Seien  $F, G$  Verteilungsfunktionen mit charakteristischen Funktionen  $\phi, \gamma$  und habe  $G$  beschränkte Ableitung. Dann gibt es absolute Konstanten  $c_1, c_2$  so dass für jedes  $T > 0$

$$\|F_G\|_\infty \leq c_1 \int_{-T}^T \left| \frac{\phi(t) - \gamma(t)}{t} \right| dt + c_2 \frac{\|G'\|_\infty}{T}$$

gilt.

**Satz 6.4** (Quasi-Powers, 2.Version). Ist  $X_n$  eine Folge von Zufallsvariablen und die Folge der dazugehörigen momenterzeugenden Funktionen  $\lambda_n(s) = \mathbb{E}(e^{sX_n})$  in einer Kreisscheibe  $0 < |s| < \rho$  analytisch mit Darstellung

$$\lambda_n(s) = e^{\beta_n U(s) + V(s)} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\kappa_n}\right) \right),$$

mit  $\beta_n, \kappa_n \rightarrow \infty$ , wobei  $U(s), V(s)$  in  $|s| < \rho$  analytisch sind mit  $U''(0) \neq 0$ . Dann gilt für Varianz und Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X_n) = \beta_n U'(0) + V'(0) + O(\kappa_n^{-1})$$

$$\mathbb{V}(X_n) = \beta_n U''(0) + V''(0) + O(\kappa_n^{-1})$$

und die Verteilung der normierten Variable  $(X_n - \beta_n U'(0)) / \sqrt{\beta_n U''(0)}$  ist asymptotisch normalverteilt und konvergiert in der Verteilung mit Konvergenzgeschwindigkeit  $O(\kappa_n^{-1} + \beta_n^{-1})$ .

*Beweis.* Die Variable  $\log(\lambda_n(s))$  ist analytisch um 0 und hat die Darstellung

$$\log \lambda_n(s) = \beta_n U(s) + V(s) + O(1/\kappa_n).$$

Durch Darstellung der Ableitungen mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel

$$\frac{1}{k!} \frac{d^r}{ds^r} \log \lambda_n(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \log \lambda_n(s) \frac{ds}{s^{r+1}}$$

und der Darstellung des Logarithmus um 0 ist auch die Größe des Fehlers der Ableitungen im Bereich  $O(1/\kappa_n)$ . Aus der momenterzeugenden Funktion  $\lambda_n$  ergeben sich Erwartungswert und Varianz durch

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{d}{ds} \log \lambda_n(s) \Big|_{s=0}, \quad \mathbb{E}(X_n^2) = \frac{d^2}{ds^2} \log \lambda_n(s) \Big|_{s=0}.$$

Wir betrachten nun die normierte Variable  $X_n^*$  und die zugehörige momenterzeugende Funktion  $\lambda_n^* = \mathbb{E}(e^{sX_n^*})$  mit

$$X_n^* := \frac{X_n - \beta_n U'(0)}{\sqrt{\beta_n U''(0)}}.$$

Dann erhalten wir

$$\log \lambda_n^*(s) = -\frac{\beta_n U'(0)}{\sqrt{\beta_n U''(0)}} s + \log \lambda_n \left( \frac{s}{\sqrt{\beta_n U''(0)}} \right)$$

und zusammen mit der Taylorentwicklung

$$\log \lambda_n \left( \frac{s}{\sqrt{\beta_n U''(0)}} \right) = U(0)\beta_n + \beta_n U'(0) \frac{s}{\sqrt{\beta_n U''(0)}} \cdots + O\left(\frac{1}{\kappa_n}\right)$$

ergibt sich die Darstellung

$$\log \lambda_n^*(s) = \frac{s^2}{2} + O\left(\frac{|s| + |s|^3}{\beta_n^{1/2}}\right) + O\left(\frac{1}{\kappa_n}\right).$$

Aus dieser Abschätzung ergibt sich dann die Konvergenz gegen eine Normalverteilung. Die genauen Abschätzungen lassen sich dann aus der Berry-Esseen Ungleichung erhalten, weil nach dem vorigen  $\lambda_n^*(it) - e^{-t^2/2}$  klein genug ist, dass für  $T_n = c\beta_n^{1/2}$

$$\int_{-T_n}^{T_n} \left| \frac{\lambda_n^*(it) - e^{-t^2/2}}{t} \right| + \frac{1}{T_n} = O(\beta_n^{-1/2} + \kappa_n^{-1})$$

gilt, also gilt auch  $\|\lambda_n^* - \Phi\|_{\infty} = O(\beta_n^{-1/2} + \kappa_n^{-1})$ . □

## 6.1 Anzahl der Komponenten von exp-log Funktionen

Das wird in [13] und [12] behandelt. Wir betrachten wieder eine in einem  $\Delta$ -Gebiet analytische Funktion  $A(z)$  mit Singularität  $\rho$ , die

$$A(z) = a \log \left( \frac{1}{1 - z/\rho} \right) + \lambda + O\left(\frac{1}{(\log(1 - z/\rho))^2}\right)$$

für  $z \rightarrow \rho$  erfüllt. Wir betrachten die Mengenkonstruktion für markierte Objekte oder die Mengen/Multimengenkonstruktion für unmarkierte Objekte.



Wir können den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl der Komponenten zwar auch aus dem Quasi-Powers Theorem erhalten, wir können sie aber auch wie im Folgenden direkt aus der bivariaten Erzeugenden Funktion bestimmen. Für markierte Objekte ist diese durch  $C(z, u) = e^{uA(z)}$  gegeben. Damit ergibt sich

$$C(z, u) = e^{u\lambda} \left( \frac{1}{1 - z/\rho} \right)^{ua} (1 + uO(\log^{-2}(1 - z/\rho)))$$

und damit

$$\frac{\delta C(z, u)}{\delta u} \Big|_{u=1} = \left( \lambda + a \log \left( \frac{1}{1 - z/\rho} \right) \right) \left( \frac{1}{1 - z/\rho} \right)^a e^\lambda (1 + O(\log^{-2}(1 - z/\rho))).$$

Daraus erhalten wir aus der Singularitätsanalyse

$$[z^n] \frac{\delta C(z, u)}{\delta u} \Big|_{u=1} = e^\lambda \frac{1}{\Gamma(a)} \frac{n^{a-1}}{\rho^n} a \left( \lambda + \log n + \frac{\delta}{\delta s} \Gamma(s) \Big|_{s=a} + O((\log n)^{-2}) \right),$$

also erhalten wir den Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X_n) = a \left( \log n - \frac{d}{ds} (\Gamma(s)) \Big|_{s=a} + \lambda \right).$$

Für unmarkierte Strukturen hat die erzeugende Funktion die Form

$$C(z) = \exp \left( A(z) + \frac{A(z^2)}{2} + \frac{A(z^3)}{3} + \dots \right),$$

also gilt für mit  $r_0 = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{A(\rho^j)}{j}$  für  $z \rightarrow \rho$

$$C(z) = \frac{e^{\lambda+r_0}}{(1 + z/\rho)^a} (1 + O(\log^{-2}(1 - z/\rho)))$$

und die bivariate erzeugende Funktion erfüllt

$$C(z, u) = \exp \left( uA(z) + \frac{u^2 A(z^2)}{2} + \dots \right).$$

Damit ist

$$\frac{\delta C(z, u)}{\delta u} = \exp \left( uA(z) + \frac{u^2 A(z^2)}{2} + \dots \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} u^{n-1} A(z^n) \right)$$

und

$$\frac{\delta C(z, u)}{\delta u} \Big|_{u=1} = C(z) \left( \sum_{n=1}^{\infty} A(z^n) \right).$$

Es ergibt sich wieder durch Singularitätsanalyse und Singularitätsanalyse der eindimensionalen erzeugenden Funktion

$$\mathbb{E}(X_n) = a \left( \log n - \frac{d}{ds} (\Gamma(s)) \Big|_{s=a} + \lambda + \sum_{k=2}^{\infty} A(\rho^k) \right).$$

Für den Erwartungswert der Anzahl der Komponenten von exp-log Strukturen gilt also  $a \log n$ . Das Verhalten der Varianz lässt sich ähnlich zeigen und ergibt  $O(\log n)$ . Um die Konvergenz der Verteilung gegen eine Normalverteilung zu zeigen, benötigen wir zunächst das folgende Ergebnis:

**Satz 6.5.** Sei  $f_u$  eine Familie von Funktionen mit Parameter  $u$ , die in einem  $\Delta$ -Gebiet analytisch sind und es gelte für  $f_u$  die Abschätzung

$$|f_u(z)| \leq K|(1-z)^{-\alpha(u)}| |L(z)|^\beta \quad z \in \Delta, u \in U$$

gilt, mit  $L(z) = -\log(1-z)$  und  $\beta \in \mathbb{R}$  mit beschränktem  $\alpha(u)$ . Sei weiters  $B \in \mathbb{R}$  so gewählt, dass  $\Re(-\alpha(u)) \geq -B$ . Dann gibt es eine Konstante  $\lambda$ , so dass gilt

$$|[z^n]f_u(z)| < \lambda K n^{B-1} (\log n)^\beta.$$

*Beweis.* Wir betrachten wieder eine Hankel-Kontur  $\gamma$  mit Winkel  $\phi$  und darauf die Cauchysche Integralformel

$$[z^n]f_u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f_u \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Mit  $\alpha(u) = \sigma(u) + i\tau(u)$  und  $z = 1 + t/n$  ergibt sich die Darstellung

$$|(1-z)^{-\alpha(u)}| = |(1-z)^{-\sigma(u)}| \left| \left( -\frac{t}{n} \right)^{-i\tau(u)} \right|.$$

Der zweite Faktor bleibt aber beschränkt durch  $\lambda > 0$  und damit gilt auch  $|(1-z)^{-\alpha(u)}| \leq \lambda |(1-z)^{-\sigma(u)}|$  und nachdem  $-\sigma(u) \geq -B$  gilt, haben wir

$$|[z^n]f_u(z)| \leq \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lambda |(1-z)^{-B}| |L(z)|^\beta \frac{dz}{|z|^{n+1}}.$$

□

Damit können wir das folgende Ergebnis erhalten:

**Satz 6.6.** Wir betrachten markierte Strukturen vom *exp-log* Typ, so dass die logarithmische Funktion in einem  $\Delta$ -Gebiet analytisch ist und für  $z \rightarrow \rho$  die Darstellung

$$A(z) = a \log \frac{1}{1-z/\rho} + \lambda + O\left(\frac{1}{\log^2(1-z/\rho)}\right)$$

hat. Dann konvergiert die Verteilung der Anzahl der Komponenten gegen eine Normalverteilung, deren Mittelwert und Varianz asymptotisch  $a \log n$  sind, wobei die Konvergenzgeschwindigkeit  $O((\log n)^{-1/2})$  beträgt.

*Beweis.* Die bivariate erzeugende Funktion  $C(z, u)$  hat die Form

$$C(z, u) = \exp(uA(z)) = e^{u\lambda} \left( \frac{1}{1-z/\rho} \right)^{au} \left( 1 + uO\left(\frac{1}{\log^2(1-z/\rho)}\right) \right).$$

Wir haben für  $C(z, 1)$  die Darstellung

$$C(z, 1) = e^\lambda \left( \frac{1}{1-z/\rho} \right)^a \left( 1 + O\left(\frac{1}{\log(1-z/\rho)^2}\right) \right)$$

und erhalten damit

$$[z^n]C(z, 1) = \frac{e^\lambda}{\Gamma(-a)} \frac{1}{\rho^n} n^{-a-1} (1 + O(\log^{-2} n)).$$

Weiters können wir die Koeffizienten von  $e^{u\lambda}(1/(1-z/\rho))^{au}$  durch Singularitätsanalyse bestimmen und erhalten

$$[z^n]e^{u\lambda}(1/(1-z/\rho))^{au} = \frac{e^{\lambda u}}{\Gamma(ua)} \frac{1}{\rho^n} n^{au-1}$$

Wenn wir  $e^{uA(z)} = (1-z/\rho)^{-ua}B(z, u)$  betrachten, dann gilt  $B(z, u) - B(\rho, u) \leq \log^{-2}(1-z/\rho)$ . Damit lassen sich mit dem vorigen Satz die Koeffizienten von  $(B(z, u) - B(\rho, u))(1-z/\rho)^{-au}$  bestimmen. Die Konstanten hängen gleichmäßig von  $Re(au)$  ab, also können wir diese Koeffizienten durch  $n^{au-1} \log^{-1} n$  abschätzen. Damit ergibt sich  $p_n \sim e^{\alpha(u-1)\log n}$  und damit können wir das Quasi-Powers-Theorem anwenden und erhalten das gewünschte Ergebnis. □

## 6.2 Anzahl der Komponenten von zusammengesetzten alg-log Funktionen

Wir verwenden Ergebnisse aus [13] und im Fall der kritischen Konstruktionen aus [1].

### 6.2.1 Subkritische Funktionen

Wir haben also die zusammengesetzte erzeugende Funktion  $C(z) = B(A(z))$ , so dass  $A(z)$  an  $\rho$  singularär ist, während der Konvergenzradius von  $B$  größer als  $|A(\rho)|$  ist. Wir nehmen an, dass  $A$  in einer  $\Delta$ -Umgebung analytisch ist und für  $z \rightarrow \rho$  die Darstellung

$$A(z) = c + \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^\alpha (d + o(1))$$

mit  $0 < \alpha < 1$  erfüllt. Für einen zusätzlichen logarithmischen Term wäre das Ergebnis analog. Wir erhalten dann das folgende Ergebnis:

**Satz 6.7.** *Unter den zuvor beschriebenen Voraussetzungen gilt mit  $C_{n,k} = [z^n u^k]C(z, u)$  und  $C_n = [z^n]C(z, 1)$  die folgende Gesetzmäßigkeit für die Anzahl der Komponenten:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{n,k}}{C_n} = \frac{k B_k c^{k-1}}{B'(c)}$$

*Beweis.* Die gewöhnliche erzeugende Funktion lässt sich um  $z = \rho$  folgendermaßen entwickeln:

$$B(A(z)) = B(c) + B'(c)d \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^\alpha + o(1) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^\alpha$$

Damit ergibt sich für die Koeffizienten durch die übliche Singularitätsanalyse

$$[z^n]B(A(z)) = \frac{B'(c)d}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{\rho^n n^{\alpha+1}} (1 + o(1))$$

Betrachten wir nun die bivariate erzeugende Funktion  $B(uA(z))$ , dann lässt sich diese für festes  $u$  ebenso entwickeln und wir haben

$$B(uA(z)) = B(uc) + B'(uc)du \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^\alpha + o(1) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^\alpha$$

und damit ergibt sich für die Koeffizienten

$$[z^n]B(uA(z)) = \frac{B'(uc)du}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{\rho^n n^{\alpha+1}} (1 + o(1)).$$

Also erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[z^n]C(z, u)}{[z^n]C(z, 1)} = \frac{uB'(uc)}{B'(c)}.$$

Das Bestimmen der Koeffizienten in  $u$  ergibt dann die Behauptung. □

Die Grenzverteilung ist eine diskrete Verteilung, das heißt auch, dass der Erwartungswert  $O(1)$  ist, es gibt also nur wenige große Komponenten. Je nach äußerer Funktion erhalten wir einige bekannte Verteilungen.

**Beispiel 9.** Wir betrachten die Folgenkonstruktion von markierten Objekten aus  $\mathcal{A}$ . Dann haben wir die erzeugende Funktion

$$B(\omega) = \frac{1}{1 - \omega}$$

mit Ableitung  $(1 - \omega)^{-2}$ . Es ergibt sich für die Koeffizienten aus dem vorigen Satz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[z^n]C(z, u)}{[z^n]C(z, 1)} = (1 - c)^2 c^{k-1} k.$$

Das entspricht einer negativen Binomialverteilung.

Für die Mengenkonstruktion und die Zyklenkonstruktion von markierten Objekten ergeben sich die Poissonverteilung beziehungsweise die geometrische Verteilung.

Es ist auch möglich, die Anzahl der Komponenten einer fixen Größe  $m$  zu betrachten. Wir betrachten hier die bivariate erzeugende Funktion

$$C(z, u) := B(A(z) + (u - 1)A_m z^m)$$

und erhalten

$$C(z, u) = B(c + (u - 1)A_m c^m) - dB'(c + (u - 1)A_m c^m) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^\alpha (1 + o(1)).$$

Damit ergibt sich auf die selbe Weise wie vorher für die Verteilung der Komponenten der Größe  $m$  die Darstellung

$$\frac{B'(c + (u - 1)A_m c^m)}{B'(c)}.$$

Insbesondere erhalten wir wieder eine negative Binomialverteilung für die Folgenkonstruktion und eine Poisson- bzw Binomialverteilung für die Mengen- bzw Zyklenkonstruktion.

### 6.2.2 Kritische Funktionen

Wir betrachten nun die kritischen Konstruktionen. Wenn wir die Anzahl aller Strukturen der Größe  $n$  mit genau  $k$  Komponenten betrachten, so entspricht das  $[z^k]B(z)[z^n]A^k(z)$ . Wenn wir die Anzahl der Komponenten in einer Struktur der Größe  $n$  mit  $X_n$  bezeichnen, erhalten wir also

$$\Pr(X_n = k) = \frac{[z^k]B(z)[z^n]A^k(z)}{[z^n]B(A(z))}.$$

Wir betrachten zunächst das Verhalten von  $[z^n]A^k(z)$ . Wir verwenden die folgende Verteilungsfunktion

**Definition 26.**

$$S(x, \lambda) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^k \frac{\Gamma(1 + \lambda k)}{\Gamma(1 + k)} \sin(\pi k \lambda)$$

für  $0 < \lambda < 1$

$$S(x, \lambda) = \frac{1}{\pi x} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^k \frac{\Gamma(1 + k/\lambda)}{\Gamma(1 + k)} \sin\left(\frac{\pi k}{\lambda}\right)$$

für  $1 < \lambda < 2$

Für  $\lambda = 3/2$  wird diese Verteilung auch als Airy-Verteilung und für  $\lambda = 1/2$  als Rayleigh-Verteilung bezeichnet. Zunächst können wir jede  $\Delta$ -Funktion  $H(z)$ , deren dominante Singularität den algebraischen Exponenten  $\lambda$  besitzt, in der Form  $\sigma + c(1 + z/\rho)^\lambda + \sum_{j=1}^k c_j(1 - z/\rho)^j + O((1 - z/\rho)^{k+1})$  schreiben. Das ist zwar nicht ganz der gleiche Ansatz wie bei den größten Komponenten, allerdings haben wir dort auch nur den Fall eines algebraischen Exponenten  $< 1$  betrachtet. Wir erhalten damit

**Satz 6.8.** *Für eine  $\Delta$ -Funktion  $H(z)$  erfüllt der  $n$ -te Koeffizient der Potenzreihe von  $H^k(z)$ , wobei  $k$  mit  $n$  variiert, die folgende Asymptotik:*

1. Für  $0 < \lambda < 1$  hat  $H(z)$  die Form  $H(z) = \sigma - h_\lambda(1 - z/\rho)^\lambda + O((1 - z/\rho))$ . Es gilt mit  $k = xn^\lambda$ , wobei  $x$  in einem kompakten Subintervall von  $(0, \infty)$  ist, dann gilt für  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig in  $k$

$$[z^n]H^k(z) \sim \sigma^k \rho^{-n} \frac{1}{n} S\left(\frac{xh_\lambda}{\sigma}, \lambda\right).$$

2. Für  $1 < \lambda < 2$  hat  $H(z)$  eine Darstellung der Form  $H(z) = \sigma - h_1(1 - z/\rho) + h_\lambda(1 - z/\rho)^\lambda + O((1 - z/\rho)^2)$ . Ist  $h_1 \neq 0$  und  $k = \frac{\sigma}{h_1}n + xn^{1/\lambda}$ , wobei  $x$  in einem kompakten Teilintervall von  $(-\infty, \infty)$  ist, dann gilt für  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig in  $k$

$$[z^n]H^k(z) \sim \sigma^k \rho^{-n} \frac{1}{n^{1/\lambda}} \left(\frac{h_1}{h_\lambda}\right)^{1/\lambda} S\left(\frac{xh_1^{1+\frac{1}{\lambda}}}{\sigma h_\lambda^{1/\lambda}}, \lambda\right).$$

3. Für  $2 < \lambda$  erfüllt die Verteilung eine Normalverteilung. Wir zeigen nur  $2 < \lambda < 3$ . Hier hat  $H(z)$  die Darstellung  $H(z) = \sigma - h_1(1 - z/\rho) + h_2(1 - z/\rho)^2 - h_\lambda(1 - z/\rho)^\lambda + O((1 - z/\rho)^3)$ . Es gilt für  $k = \frac{\sigma}{h_1}n + xn^{1/2}$  mit  $x$  aus einem kompakten Intervall von  $(-\infty, \infty)$

$$[z^n]H^k(z) \sim \sigma^k \rho^{-n} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sigma/h_1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2a^2},$$

mit  $a = 2\left(\frac{h_2}{h_1} - \frac{h_1}{2\sigma}\right)\sigma^2/h_1^2$ .

*Beweis.* 1. Für  $\lambda < 1$  ergibt die übliche Anwendung der Cauchyschen Integralformel auf einer Hankel-Kontur

$$[z^n]H^k(z) = \int_{\mathcal{H}} \sigma^k \left(1 - \frac{h_\lambda}{\sigma} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^\lambda\right)^k \frac{1}{z^{n+1}} dz + \int_{\mathcal{H}} O\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)$$

und mit der Substitution durch  $z = \rho(1 - t/n)$  erhalten wir

$$[z^n]H^k(z) \sim \int_{\mathcal{H}} \sigma^k \left(1 - \frac{h_\lambda}{\sigma} \frac{t^\lambda}{n^\lambda}\right)^{xn^\lambda} \rho^{-n} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{-n} dt$$

und damit ergibt Approximation durch eine Exponentialfunktion

$$[z^n]H^k(z) \sim -\frac{\sigma^k \rho^{-n}}{2\pi i n} \int_{\mathcal{H}} e^{t - \frac{h_\lambda x}{\sigma} t^\lambda} dt.$$

Durch Schreiben von  $e^{t - \frac{h_\lambda x}{\sigma} t^\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} e^t (-\frac{h_\lambda x}{\sigma} t^\lambda)^k \frac{1}{k!}$  erhalten wir

$$[z^n]H^k(z) \sim -\frac{\sigma^k \rho^{-n}}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \left(\frac{h_\lambda}{\sigma}\right)^k \frac{1}{\Gamma(-\lambda k)}$$

Die inverse Gammafunktion lässt sich dann so darstellen, dass die Behauptung erfüllt ist.

2. Für  $1 < \lambda < 2$  kann man wieder eine Hankel-Kontur betrachten, diesmal mit Winkel  $\pi/(2\lambda)$ , so dass sich die beiden Achsen in  $\rho(1 - 1/n^{1/\lambda})$  schneiden. Die Form der Cauchyschen Integralformel ist dann nach Substitution mit  $z = \rho(1 - t/n^{1/\lambda})$

$$[z^n]H^k(z) \sim \int_{\mathcal{H}} \left( \sigma - h_1 \left( \frac{t}{n^{1/\lambda}} \right) + h_\lambda \left( \frac{t^\lambda}{n} \right) \right)^k \rho^{-n} \left( 1 - \frac{t}{n^{1/\lambda}} \right)^{-n} dt$$

und

$$\int_{\mathcal{H}} \sigma^k (1 - h_1/\sigma(t/n^{1/\lambda}))^{xn^{1/\lambda}} (1 + h_\lambda/\sigma(t^\lambda/n))^{\sigma/h_1 n} \rho^{-n} \left( 1 - \frac{t}{n^{1/\lambda}} \right)^{-n} dt.$$

Durch Abschätzen durch die Exponentialfunktion ergibt sich

$$[z^n]H^k(z) \sim -\frac{\sigma^k}{2\pi i \rho^n n^{1/\lambda}} \int e^{\frac{h_\lambda}{h_1} t^\lambda} e^{-\frac{x h_1}{\sigma} t} dt.$$

Eine weitere Substitution mit  $u = t^\lambda \frac{h_\lambda}{h_1}$  ergibt mit  $\alpha = \frac{1}{\lambda}$  ein Integral der Form

$$-\frac{\sigma^k}{2\pi i \rho^n n^\alpha} \alpha \left( \frac{h_1}{h_\lambda} \right)^\alpha \int_{\mathcal{H}} e^u e^{\frac{x h_1^{\alpha+1}}{\sigma h_\lambda^\alpha} u^\alpha} du$$

und die Integrationskurve kann bis  $\infty$  ausgeweitet werden. Die Behauptung ergibt sich dann wie oben durch Darstellung der Exponentialfunktion als Taylorreihe und gliedweises Integrieren.

3. Für  $\lambda > 2$  kann man für  $\lambda < 3$  wieder durch Substitution, diesmal mit  $z = \rho(1 - t/\sqrt{n})$  ein Integral der Form

$$-\frac{\sigma^k}{2\pi i \rho^n \sqrt{n}} \int_{\mathcal{H}} e^{pt^2 - h_1 x t/\sigma}$$

mit  $p = h_2/h_1 - h_1/(2\sigma)$  erhalten. Durch Vervollständigen des Quadrats und Substitution mit  $u = t - h_1 x/(2p\sigma)$  ergibt sich

$$[z^n]H^k(z) \sim -\frac{\sigma^k}{2\pi i \sqrt{n} \rho^n} e^{-\frac{h_1^2 x^2}{4p\sigma^2}} \int_{\mathcal{H}} e^{pu^2} du.$$

□

**Satz 6.9.** Wenn  $A(z)$  und  $B(z)$  algebraisch mit Exponenten  $\lambda$  und  $\lambda'$  sind und  $\lambda' \leq \lambda$  gilt, dann bezeichnen wir für  $C = B(A(z))$  die Verteilung der Komponenten der Strukturen der Größe  $n$  mit  $X_n$  und es gilt

1. Für  $0 \leq \lambda \leq 1$  hat  $X_n/n^\lambda$  Werte in  $(0, \infty)$  und konvergiert gegen eine  $\lambda$ -stabile Verteilung, das heißt, dass diese durch unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen  $X_i$  mit  $X_1 + \dots + X_n \sim c_n X$  mit  $c_n = n^{1/\lambda}$  darstellbar ist.
2. Für  $1 < \lambda < 2$  ist die Verteilung bimodal und in der Nähe von  $cn$  konvergiert die Zufallsvariable  $X_n = cn + xn^{1/\lambda}$  gegen eine  $\lambda$ -stabile Verteilung
3. Für  $\lambda > 2$  ist die normierte Verteilung asymptotisch normalverteilt.

*Beweis.* Es ist bekannt [10], dass die Funktion  $S$  eine  $\lambda$ -stabile Verteilung definiert. Die Normalverteilung ist eine 2-stabile Verteilung, daher ist die sich ergebende Dichte in jedem Fall stabil. Die Dichte erhalten wir daraus zusammen mit dem Verhalten von  $[z^k]B(z)$ . Ist  $\lambda > 1$ , dann können wir für festes  $k$  auch die asymptotische Darstellung von  $A^k(z)$  bestimmen, diese ist durch  $\sigma^k + h_\lambda^k(1 - z/\rho)^{\lambda k} + o(1 - z/\rho)^{\lambda k}$  gegeben. Damit gilt  $[z^n]A^k(z) \sim \rho^{-n} n^{-\lambda k - 1} / \Gamma(-\lambda k)$ . Damit ist die Verteilung für kleine  $k$  monoton fallend, damit erhalten wir ein Maximum der Anzahl der Komponenten bei  $O(1)$  und ein weiteres bei  $cn$ , also ist die Verteilung in diesem Fall bimodal. Für  $\lambda' \geq \lambda$  lässt sich auf die gleiche Weise ein ähnliches Verhalten zeigen.  $\square$

Insbesondere der Fall  $3/2$  ist interessant für die Betrachtung von planaren Graphen.

### 6.2.3 Superkritische Funktionen

Für superkritische Kompositionen kann man zeigen, dass die Verteilung der Anzahl der Komponenten gegen eine Normalverteilung konvergiert. Der Beweis geht auf die Anwendung des Quasi-Powers-Theorems zurück und beruht darauf, das Verhalten der von  $u$  abhängigen Singularität von  $B(uA(z))$  zu betrachten. Der Beweis ist einfacher, wenn die äußere Funktion eine dominante Singularität hat, die eine einfache Polstelle ist. Dann gilt das folgende:

**Satz 6.10.** Es sei  $B(A(z))$  eine superkritische Funktion und die dominante Singularität von  $B$  eine einfache Polstelle. Erwartungswert und Varianz der Anzahl der Komponenten sind asymptotisch Vielfache von  $n$  und die Verteilung der Anzahl der Komponenten konvergiert gegen eine Normalverteilung.

*Beweis.* Es gibt ein  $\rho$ , so dass  $A(\rho) = \rho_B$ , wobei  $\rho_B$  die dominante Singularität von  $B(z)$  ist, also hat  $B(A(z))$  an  $\rho$  eine Singularität. Die Darstellung von  $B(z)$  an  $\rho_B$  ist

$$B(z) = \frac{C}{1 - z/\rho_B} + D + o(1)$$

und nachdem  $A(z)$  in einer Umgebung von  $\rho$  analytisch ist, hat es die Darstellung

$$B(z) = \rho_B + A'(\rho)(z - \rho) + \dots$$

Damit hat  $B(A(z))$  die Form

$$B(A(z)) = C \frac{1}{A'(\rho)(z - \rho)/\rho_B + O((z - \rho)^2)} + D + o(1)$$

und die Singularitätsanalyse ergibt

$$[z^n]B(A(z)) = \frac{C\rho_B}{\rho A'(\rho)\rho^n}(1 + o(1))$$

Nun betrachten wir das Verhalten von  $B(uA(z))$  für ein  $u$ , das nahe an 1 liegt. Wir suchen ein  $z$ , so dass  $uA(z) = \rho_B$ . Nachdem  $A(\rho)$  den Wert  $\rho_B$  annimmt und in einer Umgebung von  $\rho$  analytisch ist, gibt es eine Umgebung von 1 in der diese Gleichung eindeutig lösbar ist. Die Funktion  $\rho(u)$  ist die Lösung von  $uA(\rho(u)) = \rho_B$  und ist in einer Umgebung von 1 analytisch. Wir können  $\rho(u)$  in der Nähe von 1 in eine Potenzreihe entwickeln, diese hat die Form

$$\rho(u) = \rho - \frac{\rho}{A'(\rho)}(u - 1) + O(u - 1)^2.$$

Damit hat die Funktion  $B(uA(z))$  für  $z \rightarrow \rho(u)$  durch Einsetzen wie oben die Form

$$B(uA(z)) \sim \frac{C\rho_B}{u\rho(u)A'(\rho(u))} \frac{1}{1 - z/\rho}$$

Die Funktion  $B(uA(z))/z^{n+1}$  hat nun für  $z < S$  mit einem passenden  $S$  zwei Singularitäten, nämlich 0 und  $\rho(u)$ . Damit ergibt sich aus dem Residuensatz bei Betrachten des Konturintegrals

$$\int_{|z|=S} \frac{B(uA(z))}{z^{n+1}} dz = [z^n]B(uA(z)) + \text{Res}_{z=\rho(u)} (B(uA(z))) z^{-n-1} \Big|_{z=\rho(u)}$$

und damit ergibt sich aus der Asymptotik für  $B(uA(z))$

$$[z^n]B(uA(z)) \sim \frac{C\rho_B}{u\rho(u)A'(\rho(u))} \rho(u)^{-n} (1 + O(K^{-n}))$$

für ein  $K > 1$ , weil sich das Integral wie  $O(S^{-n})$  verhält und das Residuum aus der Darstellung von  $B(A(z))$  folgt. Damit erfüllt die normierte Form die Darstellung

$$A(u) = \left( \frac{\rho}{\rho(u)} \right)^n (1 + O(K^{-n})),$$

also kann das Quasi-Powers Theorem angewandt werden. □

Der Ansatz kann auch angewandt werden, wenn  $B$  keine einfache Polstelle besitzt. Wir können dann wieder eine Darstellung von  $B(A(z))$  und  $B(uA(z))$  aus der Darstellung von  $B(z)$  und der Taylorentwicklung von  $A(z)$  erhalten,  $\rho(u)$  bestimmen und auf diese Darstellung das Quasi-Powers-Theorem anwenden. Es gilt also ebenso nach [12] dass die Anzahl der Komponenten einer superkritischen Konstruktion mit äußerer Funktion

$$B(z) = \left( 1 - \frac{z}{\rho_b} \right)^\alpha \log^k \left( \frac{1}{(1 - z/\rho_b)} \right)$$

asymptotisch normalverteilt mit Erwartungswert  $cn$  ist.



## 6.3 Zusammenfassung der Ergebnisse des ersten Teils

### Exp-log Strukturen

- Die Verteilung der größten Komponente ist eine verallgemeinerte Dickmann-Funktion (Satz 4.5) und der Erwartungswert ist  $cn$  (Satz 4.6).
- Die Verteilung der kleinsten Komponente ist eine verallgemeinerte Buchstab-Funktion (Satz 5.5) und der Erwartungswert ist  $\log n$  für  $a = 1$ ,  $n^{1-a}$  für  $a < 1$  und  $O(1)$  für  $a > 1$  (Satz 5.2).
- Die Verteilung der Anzahl der Komponenten ist asymptotisch normalverteilt mit Erwartungswert  $a \log n$  (Satz 6.4).

### Subkritische Strukturen

- Die Verteilung der größten Komponente ist in Satz 4.9 gegeben und hat Erwartungswert  $n - \kappa_1 n^{(1-\alpha)} (\log n)^\beta$  (Satz 4.10).
- Die Verteilung der Anzahl der Komponenten wird in Satz 5.14 behandelt. Die Verteilungsfunktion ist diskret und hat damit Erwartungswert  $O(1)$ .

Für  $\exp(\text{alg-log})$  Strukturen (diese sind ein Spezialfall der subkritischen Strukturen) ist der Erwartungswert der kleinsten Komponente  $ne^{-c}$  (Satz 5.12).

### Kritische Strukturen

- Die Verteilung der größten Komponente ist in Satz 4.11 gegeben und hat Erwartungswert  $cn$  (Satz 4.12).
- Die Verteilung der Anzahl der Komponenten ist hauptsächlich vom Exponenten der inneren Funktion abhängig und in Satz 6.7 gegeben.

### Superkritische Strukturen

- Die Verteilung der größten Komponente ist in Satz 4.13 gegeben und doppelt exponentiell. Der Erwartungswert beträgt  $\log n - (\alpha + 1) \log \log n$  (Satz 4.14).
- Der Erwartungswert der kleinsten Komponenten ist  $O(1)$  und Komponenten einer beliebigen kleinen Größe sind mit hoher Wahrscheinlichkeit in größerer Anzahl vorhanden.
- Die Verteilung der Anzahl der Komponenten ist eine Normalverteilung mit Erwartungswert  $cn$  (Satz 6.9).

## 7 Untersuchungen des Komponentenspektrums: Ansatz

Wir wollen nun einen anderen Ansatz behandeln, um die Verteilungsfunktion der Komponentengrößen zu erhalten. Wir bezeichnen für ein Konstrukt der Größe  $n$  und  $i \leq n$  die Anzahl der Komponenten der Größe  $i$  mit  $C_i^{(n)}$  und schreiben den Vektor der Komponentengrößen in der Form

$$C^{(n)} = (C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, \dots, C_n^{(n)}).$$

Es gilt also  $\sum_{k=1}^n kC_k^{(n)} = n$  und die Anzahl der Komponenten ergibt sich aus  $K_n := \sum_{k=1}^n C_k^{(n)}$ . Wenn wir nun eine Klasse von Konstruktionen der Größe  $n$  betrachten, dann interessieren wir uns für die Verteilung von  $C^{(n)}$  und schreiben diese als  $\mathcal{L}(C^{(n)})$ . Wir verwenden im Folgenden Konstruktionen, für die die Verteilung der Komponentengrößen auf die folgende Weise konstruiert werden kann:

**Definition 27.** Ein Zufallsvektor  $C^{(n)}$  erfüllt die Bedingung der bedingten Wahrscheinlichkeit, wenn es eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen  $Z_k$ ,  $k \leq n$  gibt, so dass

$$\mathcal{L}(C_1^{(n)}, \dots, C_n^{(n)}) = \mathcal{L}(Z_1, \dots, Z_n | T_{0n} = n)$$

gilt, wobei  $T_{0n} := \sum_{k=1}^n kZ_k$  die Gesamtgröße bezeichnet.

Wir können die Konstruktion also so sehen, dass wir alle möglichen Strukturen aus Komponenten mit Größe höchstens  $n$  konstruieren und dann nur diejenigen mit Gesamtgröße  $n$  betrachten. Die Methode wurde von Fristedt [16] bei der Untersuchung von Integerpartitionen zum ersten Mal verwendet. Für eine Konstruktion, deren Komponentenvektor

$$\mathcal{L}(C_1^{(n)}, \dots, C_n^{(n)}) = \mathcal{L}(Z_1, \dots, Z_n | T_{0n} = n)$$

für unabhängige Zufallsvariablen  $Z_i$  erfüllt, ist die Verteilung von  $C^{(n)}$  durch

$$\Pr(C_1^{(n)} = c_1, \dots, C_n^{(n)} = c_n) = \left( \Pr \left( \sum_{j=0}^n jZ_j = n \right) \right)^{-1} \prod_{j=1}^n \Pr(Z_j = c_j) \mathbb{1}_n \left( \sum_{j=1}^n jc_j \right)$$

gegeben. Nachdem die Punktwahrscheinlichkeiten der  $Z_j$  bekannt sind, ist die einzige Unbekannte der Faktor  $\Pr(T_{0n} = n)$ , wir werden also in den meisten Fällen versuchen, das asymptotische Verhalten von  $T_{0n}$  zu bestimmen.

Ist  $B \subset \mathbb{Z}_+$  eine beliebige Menge, dann schreiben wir  $T_B(x) := \sum_{i \in B} ix_i$  und ebenso  $C^{(n)}(B) := (C_i^{(n)}, i \in B)$ . Wir werden später die Tatsache benötigen, dass, wenn die Voraussetzung der bedingten Wahrscheinlichkeit erfüllt ist, der Totalvariationsabstand zwischen den summierten Verteilungen des Vektors der  $Z_i$  und dem summierten Komponentenvektor gleich dem Totalvariationsabstand der Verteilungen dieser Zufallsvektoren ist. Diese Eigenschaft stammt aus dem Buch von Arratia, Barbour und Tavaré [21].

**Satz 7.1.** Für  $B \subset (1, \dots, n)$  gilt mit den bisherigen Bezeichnungen

$$d_{TV}(\mathcal{L}(C^{(n)}(B)), \mathcal{L}(Z(B))) = d_{TV}(\mathcal{L}(T_B(Z)), \mathcal{L}(T_B(C^{(n)})|T_{0n}(Z) = n))$$

*Beweis.* Wegen der Bedingung der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt für Vektoren  $a \in \mathbb{N}^n$

$$\begin{aligned}
& 2d_{TV}(\mathcal{L}(C^{(n)}(B)), \mathcal{L}(Z(B))) \\
&= \sum_{a \in \mathbb{Z}_+^{|B|}} |\Pr(C^{(n)}(B) = a) - \Pr(Z(B) = a)| \\
&= \sum_{a \in \mathbb{Z}_+^{|B|}} \left| \frac{\Pr(Z(B) = a, T_{0n} = n)}{\Pr(T_{0n} = n)} - \Pr(Z(B) = a) \right| \\
&= \sum_k \sum_{a \in \mathbb{Z}_+^{|B|}: T_B(a)=k} \left| \frac{\Pr(Z(B) = a) \Pr(T_{n \setminus B} = n - k)}{\Pr(T_{0n} = n)} - \Pr(Z(B) = a) \right|
\end{aligned}$$

nachdem  $Z(B)$  und  $T_{n \setminus B}$  unabhängig sind und durch Vertauschen der Summationsreihenfolge

$$\begin{aligned}
& \sum_k \left( \sum_{a \in \mathbb{Z}_+^{|B|}: T_B(a)=k} \Pr(Z(B) = a) \right) \left| \frac{\Pr(T_{n \setminus B} = n - k)}{\Pr(T_{0n} = n)} - 1 \right| \\
&= \sum_k \Pr(T_B = k) \left| \frac{\Pr(T_{n \setminus B} = n - k)}{\Pr(T_{0n} = n)} - 1 \right|
\end{aligned}$$

und die letzte Gleichung entspricht

$$\sum_k |\Pr(T_B = k | T_{0n} = n) - \Pr(T_B = k)|$$

und das ergibt genau die Behauptung □

## 7.1 Konstruktionen

Es gibt einige übliche Klassen von Konstruktionen, die die Anforderungen der bedingten Wahrscheinlichkeit erfüllen. Die Konstruktionen sind die bereits bekannten markierten und unmarkierten Mengenkonstruktionen, nur diesmal ohne erzeugende Funktion [21], Kapitel 2.

**Mengen von markierten Objekten:** Wir können für ein fixes  $n \in \mathbb{N}$  die Menge  $1, \dots, n$  in eine Anzahl von Blöcken von fixer Größe partitionieren. Man verwendet dann für jeden dieser Blöcke der Größe  $i$  eine von  $m_i$  möglichen Komponenten. Für einen fixen Vektor der Komponentengrößen  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  ist die Anzahl der Konstruktionen, die diesen ergeben durch

$$n! \prod_{i=1}^n \binom{m_i}{i!}^{c_i} \frac{1}{c_i!}$$

gegeben, nachdem es  $m_i^{c_i}$  Möglichkeiten der Auswahl der Komponenten der Größe  $i$  gibt und die Anzahl der Unterteilungen von  $1, \dots, n$  in Blöcke der Größe  $c_i$  einem Faktor der Form  $\frac{n!}{\prod (i!)^{c_i} c_i!}$  entspricht. Wenn wir markierte Objekte betrachten, ist das genau die Mengenkonstruktion.

Betrachten wir andererseits unabhängige, poisson-verteilte Zufallsvariablen  $Z_i$  mit

$$Z_i \sim Po\left(\frac{m_i x^i}{i!}\right)$$

mit beliebigem  $x > 0$ , dann sind die Punktwahrscheinlichkeiten

$$\Pr(Z_i = l) = e^{-\frac{m_i x^i}{i!}} \left(\frac{m_i x^i}{i!}\right)^l \frac{1}{l!},$$

also gilt für  $\sum_{j=1}^n j c_j = n$

$$\Pr(Z_1 = c_1 \dots Z_n = c_n) = x^n \exp\left(-\sum_{j=1}^n \frac{m_j x^j}{j!}\right) \prod_{j=1}^n \left(\frac{m_j}{j!}\right)^{c_j} \frac{1}{c_j!}.$$

Damit erhalten wir auch

$$\Pr\left(\sum_{i=1}^n i Z_i = n\right) = x^n \exp\left(-\sum_{j=1}^n \frac{m_j x^j}{j!}\right) \sum_{c: \sum i c_i = n} \prod_{j=1}^n \left(\frac{m_j}{j!}\right)^{c_j} \frac{1}{c_j!},$$

also gibt es eine Konstante  $D$ , so dass die bedingte Wahrscheinlichkeit die Form

$$\Pr\left(Z_1 = c_1, \dots, Z_n = c_n \mid \sum_{i=1}^n i Z_i = n\right) = D \prod_{j=1}^n \left(\frac{m_j}{j!}\right)^{c_j} \frac{1}{c_j!}$$

hat. Nachdem die Summe über alle in Frage kommenden Vektoren 1 ergeben muss, ist die Konditionierungsbedingung erfüllt.

**Beispiel 10.** Das einfachste Beispiel sind Zyklen von Permutationen. Hier wäre  $m_i = (i-1)!$ , daher ist  $Z_i \sim Po(1/i)$ .

**Multimengen:** Hier erfüllt die Anzahl der Konstruktionen mit dem Komponentenvektor  $c = (c_1 \dots c_i)$ , so dass die Summe der Komponentengrößen  $n$  ergibt,

$$\prod_{i=1}^n \binom{m_i + c_i - 1}{c_i}.$$

Die Formel ergibt sich, weil man jede Multimenge als einen Vektor aus zwei Elementen  $a, b$  der Länge  $m_i + c_i$  mit genau  $m_i$  Vorkommnissen des Elements  $a$  und  $c_i$  Vorkommnissen des Elements  $b$  schreiben kann. Der Vektor beginnt mit  $a$  und auf das  $i$ -te  $a$  folgen so viele  $b$  wie Vorkommnisse der entsprechenden Komponente. Wenn man nun für  $0 < x < 1$  die unabhängigen Zufallsvariablen als negativ binomialverteilt annimmt, mit  $Z_i \sim NB(m_i, x^i)$ , dann hat  $Z_i$  die Punktwahrscheinlichkeiten

$$\Pr(Z_i = l) = (1 - x^i)^{m_i} \binom{m_i + l - 1}{l} x^{il}$$

und für die gemeinsame Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$\Pr(Z_1 = c_1, \dots, Z_n = c_n) = x^n \left(\prod_{j=1}^n (1 - x^j)^{m_j}\right) \prod_{i=1}^n \binom{m_i + c_i - 1}{c_i}.$$

Nachdem das erste Produkt nicht von  $c_i$  abhängt, ergibt sich wieder wie vorher, dass Multimengen mit den negativ binomialverteilten Zufallsvariablen die Konditionsbedingung erfüllen.

**Beispiel 11.** Ein einfaches Beispiel sind Partitionen einer Zahl. Hier sind alle  $m_i = 1$ . Dann sind die  $Z_i \sim NB(1, x^i)$  und der Erwartungswert der  $Z_i$  ist  $(1 - x^i)/x^i$

**Mengen von unmarkierten Objekten** sind die Konstruktionen, für die jedes Element der  $m_i$  Elemente der Größe  $i$  genau einmal ausgewählt werden kann. Damit haben wir für einen fixen Vektor  $c$  der Komponentenanzahlen  $\prod_{i=1}^n \binom{m_i}{c_i}$  mögliche Konstruktionen. Für binomialverteilte unabhängige Zufallsvariablen  $Z_i \sim Bi(m_i, x^i/(1+x^i))$  mit  $x > 0$  gilt für die Punktwahrscheinlichkeiten

$$\Pr(Z_i = l) = \binom{m_i}{l} \left( \frac{x^i}{1+x^i} \right)^l \left( \frac{1}{1+x^i} \right)^{m_i-l}$$

und die gemeinsame Wahrscheinlichkeit erfüllt

$$\begin{aligned} \Pr(Z_1 = c_1, \dots, Z_n = c_n) &= \prod_{i=1}^n \binom{m_i}{c_i} \left( \frac{x^i}{1+x^i} \right)^{c_i} \left( \frac{1}{1+x^i} \right)^{m_i-c_i} = \\ &= x^n \left( \prod_{i=1}^n (1+x^i)^{-m_i} \right) \prod_{i=1}^n \binom{m_i}{c_i}, \end{aligned}$$

damit ist wieder die Anforderung der bedingten Wahrscheinlichkeit erfüllt.

**Beispiel 12.** Partitionen, bei denen alle Komponentengrößen unterschiedlich sind ergeben  $m_i = 1$  und wir erhalten  $\mathbb{E}(Z_i) = x^i/(1+x^i)$ .

Die Zufallsvariablen hängen immer von einem Parameter ab, sind also auf jeden Fall nicht eindeutig. Wir werden Strukturen betrachten, bei denen wir die Erwartungswerte der  $Z_i$  so einschränken, dass  $\mathbb{E}(Z_i) \sim n^\alpha$  gilt. Wenn wir beispielsweise zusammengesetzte erzeugende Funktionen mit äußerer Exponentialfunktion und einer inneren algebraisch-logarithmischen Funktion, dann fallen diese in vielen Fällen mit einem passenden  $x$  in den vorher ausgeführten Beispielen in diese Kategorie und können in den folgenden Abschnitten behandelt werden. Wir bezeichnen diese als **logarithmisch**, wenn  $\alpha = -1$ , **konvergent** für  $\alpha < -1$  und **divergent** für  $\alpha > -1$ . Das Verhalten der Komponentengrößen unterscheidet sich je nach Fall stark.

## 7.2 Eine Rekursion für Summen Poisson-verteilter Zufallsvariablen

Wir betrachten eine Folge unabhängiger Poisson-verteilte Zufallsvariablen  $Z_j$  mit Parameter  $a_j$ . Dann gilt für jede beschränkte Funktion  $f$  und alle  $Z_j$

$$\mathbb{E}(Z_j f(Z_j)) = a_j \mathbb{E}(f(Z_j + 1)),$$

weil  $Z_j$  die Punktwahrscheinlichkeiten

$$\Pr(Z_j = k) = \frac{a_j^k}{k!} e^{-a_j}$$

hat und damit gilt

$$\mathbb{E}(Z_j f(Z_j)) = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(Z = k) k f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{(k-1)!} f(k) = a \mathbb{E}(f(Z_j)).$$

Für eine Funktion  $f(x) = g(jx)$  gilt also auch

$$\mathbb{E}(jZ_j g(jZ_j)) = ja_j \mathbb{E}(g(jZ_j + j)).$$

Betrachten wir nun die Summe  $T_{bn}(Z) := \sum_{j=b+1}^n jZ_j$ , dann erhalten wir daraus

$$\mathbb{E}(T_{bn}(Z)g(T_{bn}(Z))) = \sum_{j=b+1}^n ja_j \mathbb{E}(g(T_{bn}(Z) + j))$$

und damit insbesondere für  $g = \mathbb{1}_l$  die Rekursion

$$l\Pr(T_{b,n}(Z) = l) = \sum_{j=b+1}^n ja_j \Pr(T_{bn}(Z) = l - j).$$

Darauf wird später unsere Abschätzung im konvergenten und logarithmischen Fall beruhen. Diese Rekursionsformel ist auch die Grundlage der Steinschen Methode für Poisson-verteilte Zufallsvariablen, wir geben ihr hier aufgrund der häufigen Verwendung einen eigenen Abschnitt.

### 7.3 Die Steinsche Methode für Poisson-verteilte Zufallsvariablen

Dieser Abschnitt stammt aus [2]. Die Steinsche Methode ist eigentlich eine Sammlung von Techniken, um den Abstand zwischen Verteilungen zu bestimmen. Wenn wir für eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  auf  $\mathbb{R}$  zwei Wahrscheinlichkeitsmaße  $P, V$  gegeben haben, und  $\mathcal{F} := \{\mathbb{1}_A, A \in \mathcal{A}\}$  die Menge aller Indikatorfunktionen messbarer Mengen ist, dann erfüllt die Totalvariation

$$d_{TV}(P, V) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \left( \left| \int f dP - \int f dV \right| \right).$$

Wir können also die Totalvariation durch die Erwartungswerte der Funktionen aus  $\mathcal{F}$  darstellen. Es gibt noch andere Metriken, die sich für eine andere Klasse von messbaren Funktionen auf diese Weise darstellen lassen, beispielsweise die Kolmogorov- oder Wassersteindistanz. Es geht darum, für eine feste Verteilung und eine Klasse von Funktionen  $\mathcal{F}$  zunächst einen Operator  $T$  zu finden, der für alle  $h \in \mathcal{F}$  genau dann die Steinsche Gleichung

$$\mathbb{E}((Th)(Z)) = 0$$

erfüllt, wenn die Zufallsvariable  $Z$  die gesuchte Verteilung besitzt. Es gibt für jede Funktion  $h \in \mathcal{F}$  eine eindeutige Funktion  $f_h$ , für die

$$(Tf_h)(x) = h(x) - \mathbb{E}(h(Z))$$

gilt. Ist nun  $X$  eine beliebige Zufallsvariable, dann erhalten wir daraus

$$\mathbb{E}(Tf_h)(X) = \mathbb{E}(h(X) - h(Z)).$$

Die linke Seite der Gleichung hängt nun von  $X$  ab und das Vorgehen macht Sinn, wenn sich die linke Seite einfacher abschätzen lässt. Die ursprüngliche Methode war für die Normalverteilung, wir werden aber nur die Poisson-Verteilung betrachten.

**Satz 7.2.** Für die Poisson-Verteilung mit Parameter  $\lambda$  hat der Stein-Operator für jede beschränkte Funktion  $f$  die Form

$$(Tf)(k) = \lambda f(k+1) + kf(k).$$

Wir haben bereits im vorigen Abschnitt nachgerechnet, dass für eine poisson-verteilte Zufallsvariable  $\mathbb{E}(Tf(Z)) = 0$  gilt. Sei andererseits  $A \subset \mathbb{Z}_+$  eine beliebige Menge. Wenn  $Z$  poisson-verteilt mit Parameter  $\lambda$  ist, lässt sich induktiv eine Funktion  $g_{\lambda,A}$  mit

$$\mathbb{1}_A = \lambda g_{\lambda,A}(j+1) - jg_{\lambda,A} + \mathbb{E}(\mathbb{1}_A(Z))$$

bestimmen, die die Gleichung löst. Nachdem  $\mathbb{E}(Tg_{\lambda,A}) = Pr(X \in A) - Pr(Z \in A)$  ist, folgt aus der Erfüllung der steinschen Gleichung auch, dass  $X$  poisson-verteilt ist. Es lässt sich zeigen, dass  $g_{\lambda,A}$  durch

$$\|g_{\lambda,A}\| \leq \min\left(1, \sqrt{\frac{2}{e\lambda}}\right) (\sup(f) - \inf(f))$$

beschränkt ist. Weiters gilt auch

$$\|\Delta g_{\lambda,A}(k)\| = \|g_{\lambda,A}(k) - g_{\lambda,A}(k+1)\| \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} (\sup(f) - \inf(f)).$$

Wir können nun ein einfaches Beispiel zeigen:

**Beispiel 13.** Für eine Summe von unabhängigen Zufallsvariablen  $W = \sum_{i=1}^n X_i$  mit  $X_i \in \{0, 1\}$  und  $\mathbb{E}(X_i) = p_i$  mit  $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i$  gilt

$$d_{TV}(\mathcal{L}(W), Po(\lambda)) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{i=1}^n p_i^2$$

Wenn wir  $W_i = \sum_{j \neq i} X_j$  definieren, so sind  $W_i$  und  $X_i$  unabhängig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\lambda g(W+1) - Wg(W)) &= \left(\sum_{i=1}^n p_i\right) \mathbb{E}g(W+1) - \sum_{i=1}^n p_i \mathbb{E}g(W_i+1) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \mathbb{E}(g(W_i + X_i + 1) - g(W_i + 1)) \end{aligned}$$

und die Funktion innerhalb des Erwartungswertes lässt sich durch  $p_i \|\Delta g\|$  abschätzen, damit ergibt sich

$$\mathbb{E}(\lambda g(W+1) - Wg(W)) \leq \sum_{j=1}^n p_j^2 \|\Delta g\|,$$

daraus können wir die Totalvariation erhalten. Die Konvergenz von Summen von unabhängigen Zufallsvariablen gegen die Poisson-Verteilung wird auch als Gesetz der kleinen Zahlen bezeichnet.

Wir werden das folgende Ergebnis zwar nicht verwenden, aber es ist möglich, das vorangegangene Beispiel auf Zufallsvariablen auszuweiten, die nicht unabhängig sind:

**Satz 7.3.** Wir betrachten für Zufallsvariable  $(X_i)_{i \in I} \in \{0, 1\}$  mit  $\mathbb{E}(X_i) = p_i$ , wobei die  $X_i$  nicht notwendigerweise unabhängig sind  $W = \sum_{i \in I} X_i$  und es sei für jedes  $i \in I$   $\Gamma_i^s$  die Menge der Indices  $j$ , für die  $X_j$  'stark' von  $X_i$  abhängig ist und  $\Gamma_i^w = I \setminus \{i \cup \Gamma_i^s\}$ . Dann lässt sich der Abstand der Totalvariation durch

$$d_{TV}(\mathcal{L}(W), Po(\lambda)) \leq k_2(\lambda) \sum_i (p_i \mathbb{E}(X_i + Z_i) + \mathbb{E}(X_i Z_i)) + k_1(\lambda) \sum_i \mathbb{E}(p_i - \mathbb{E}(X_i | W_i))$$

mit  $Z_i = \sum_{j \in \Gamma_i^s} X_j$  und  $W_i = \sum_{j \in \Gamma_i^w} X_j$  schreiben, wobei  $k_1(\lambda) = \min(1, \sqrt{2/(e\lambda)})$  und  $k_2(\lambda) = (1 - e^{-\lambda})/\lambda$ .

*Beweis.* Wir schreiben wieder

$$d_{TV}(W, Po(\lambda)) = \sup_{A \subset \mathbb{Z}_+} \left( \sum_A |\mathbb{E}(\lambda f_A(W+1) - W f_A(W))| \right).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\lambda f_A(W+1) - W f_A(W)) &= \sum_{i \in I} \mathbb{E}(p_i f_A(W+1) - X_i f_A(W)) \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{E}(p_i f_A(W+1) - p_i f_A(W_i+1) + p_i f_A(W_i+1) - X_i f_A(W_i+1) + X_i f_A(W_i+1) - X_i f_A(W)) \end{aligned}$$

und dann gilt

$$\begin{aligned} |f_A(W+1) - f_A(W_i+1)| &\leq \|\Delta f_A\| (X_i + Z_i) \\ |X_i f_A(W_i+1) - X_i f_A(W)| &\leq \|\Delta f_A\| X_i Z_i \\ |\mathbb{E}(p_i f_A(W_i+1) - X_i f_A(W_i+1))| &\leq \|f_A\| \mathbb{E}(|p_i - \mathbb{E}(X_i | W_i)|) \end{aligned}$$

und daraus folgt dann die Behauptung.  $\square$

Wenn Zufallsvariablen nur sehr schwach korrelieren, wird der zweite Term klein werden und wenn nur wenige Variablen 'stark' abhängig sind, ist auch der erste Term klein. Ganz allgemein beruht die Anwendung der Steinschen Methode üblicherweise auf dem Auslassen einiger Variablen und Ausnutzen der Unabhängigkeit.

**Definition 28.** Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , ein mit einer  $\sigma$ -Algebra versehener Raum  $E$  und eine Indexmenge  $T$ . Ein stochastischer Prozess ist eine Familie von Zufallsvariablen  $X_t, t \in T$ , also eine Abbildung  $\Omega \times T \rightarrow E$  so dass  $X_t(\omega), \omega \in \Omega \rightarrow E$  für alle  $t \in T$  eine messbare Abbildung ist.

**Definition 29.** Ein stochastischer Prozess ist ein diskreter Markov-Prozess, wenn es eine abzählbare Menge von Zuständen gibt und für alle  $n \in \mathbb{N}$  und Zeitpunkte  $0 \leq s_0 < \dots < s_n < s < t$  und Zustände  $j, i, i_0, \dots, i_n$ .

$$\mathbf{Pr}(X_t = j | X_s = i, X_{s_n} = i_n, \dots, X_{s_0} = i_0) = \mathbf{Pr}(X_t = j | X_s = i)$$

gilt. Für alle  $0 \leq s < t$  und Zustände  $i, j$  heißen

$$p_{ij}(s, t) := \mathbf{Pr}(X_t = j | X_s = i)$$

die Übergangswahrscheinlichkeiten. Ein Markov-Prozess heißt homogen, wenn für alle  $i, j$  und  $0 \leq s < t$

$$p_{ij}(s, t) = p_{ij}(0, t - s) =: p_{ij}(t - s)$$

gilt. Der infinitesimale Generator ist, wenn der Limes existiert, dann die Matrix mit Einträgen

$$a_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(0, t) - p_{ij}(0, 0)}{t}$$



**Definition 30.** Ein Geburts- und Todesprozess ist ein homogener Markovprozess  $X_t$ ,  $t \geq 0$ , so dass  $X_t$  von jedem Zustand  $i$  nur in die Zustände  $i + 1$  und  $i - 1$  wechseln kann. Der infinitesimale Generator ist durch die Matrix

$$a_{i,i+1} = \lambda_i, a_{i,i} = -\lambda_i - \mu_i, a_{i,i-1} = \mu_i$$

gegeben.

Die vorangegangenen Bezeichnungen und Definitionen stammen aus [24]. Wir wollen den Stein-Operator als Generator eines Geburts- und Todesprozesses schreiben. Der infinitesimale Generator eines Geburts- und Todesprozess mit Todesrate  $i$  und Geburtenrate  $\lambda$  hat die Matrixdarstellung

$$p_{i,i+1} = \lambda, p_{i,i-1} = i, p_{i,i} = -\lambda - i.$$

Die Punktwahrscheinlichkeiten der Poisson-Verteilung mit Parameter  $\lambda$  sind durch  $\mathbf{Pr}(Z = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$  gegeben und damit gilt  $\mathbf{Pr}(Z = i-1)p_{i-1,i} + \mathbf{Pr}(Z = i+1)p_{i+1,i} = \mathbf{Pr}(Z = i)p_{i,i}$ , also ist  $\text{Po}(\lambda)$  eine stationäre Verteilung dieses Prozesses. Sei also  $Z_t$  ein Geburts- und Todesprozess mit poisson-verteilter Anfangsverteilung  $Z_0$  und Generator  $\mathcal{A}$ . Es sei  $T$  der Stein-Operator für die Poisson-Verteilung mit Parameter  $\lambda$  und wir erhalten mit  $f(k) = g(k) - g(k-1)$

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \mathbb{E}(g(Z_u) - g(Z_0) | Z_0 = k) &= (\mathcal{A}g)(k) \\ &= \lambda g(k+1) + k g(k-1) - (\lambda + k)g(k) = (Tf)(k). \end{aligned}$$

Damit kann der Stein-Operator als Generator eines Markov-Prozesses interpretiert werden und ist  $X$  eine poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter  $\lambda$ , dann ist die Lösung von

$$-\mathcal{A}g = h - \mathbb{E}(h(X))$$

durch

$$g(k) = \int_0^\infty (\mathbb{E}(h(Z_t) | Z_0 = k) - \mathbb{E}(h(X))) dt$$

gegeben und daraus können wir auch  $f(k)$  erhalten.

Wir interessieren uns für den allgemeineren Fall einer zusammengesetzten Poisson-Verteilung.

**Definition 31.** Eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung  $CP(\pi)$  ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit charakteristischer Funktion

$$\phi(t) = \exp\left(-\int_0^\infty (1 - e^{itx}) d\pi(x)\right),$$

wobei  $\int_0^\infty \min(x, 1) d\pi(x) < \infty$  gelten muss.

Wir interessieren uns nur für den Fall, dass die Verteilungsfunktion diskret ist und auf den natürlichen Zahlen definiert ist. Ist dann  $\pi_k$  der Wert der Wahrscheinlichkeitsfunktion an  $k$  und zusätzlich  $\|\pi\| < \infty$ , dann lässt sich die Verteilung in der Form

$$CP(\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} k Z_k$$

für unabhängige Poisson-verteilte Variablen  $Z_k \sim Po(\pi_k)$  schreiben. Der Steinsche Operator hat dann analog zur Poisson-Verteilung die Form

$$(T_f)(k) = \sum_{i=1}^{\infty} i\pi_i f(k+i) - kf(k).$$

Es gibt auch hier ähnlich wie bei der Poisson-Verteilung wieder Abschätzungen der Lösungen des Stein-Operators  $\|f\|$  und  $\|\Delta f\|$  und daraus Abschätzungen des Totalvariationsabstandes. Uns interessiert allerdings die Schreibweise als infinitesimaler Generator. Die zusammengesetzte Poisson-Verteilung ist analog zur Poisson-Verteilung die stationäre Verteilung eines Markov-Prozesses, dessen infinitesimaler Generator  $\mathcal{A}$  durch  $p_{i,i-1} = i$  und  $p_{i,i+1} = j\pi_j - (j+1)\pi_{j+1}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$  gegeben ist. Mit  $f(k) = g(k) - g(k-1)$  ergibt sich

$$(\mathcal{A}g)(k) = \sum_{i=1}^{\infty} (i\pi_i - (i+1)\pi_{i+1})g(k+1) + kg(k-1) - \pi_1 + kg(k) = (Tf)(k).$$

Die Lösung von

$$-\mathcal{A}g = h - \mathbb{E}(h(X))$$

für eine Zufallsvariable  $X$ , die nach der zusammengesetzten Poisson-Verteilung verteilt ist, erhalten wir dann ebenso wie bei der Poisson-Verteilung.

# 8 Untersuchungen des Komponentenspektrums: Ergebnisse

## 8.1 Logarithmische Strukturen

Wir betrachten Strukturen, die die Anforderung an die bedingte Wahrscheinlichkeit und

$$\mathbb{E}(Z_i) \sim \frac{\theta}{i}$$

für eine Konstante  $\theta \neq 0$  erfüllen. Damit ist der Erwartungswert der Gesamtanzahl der Komponenten in etwa  $\log n$ . Die Ergebnisse dieses Abschnitts stammen aus [21]. Wir gehen zunächst von dem einfachsten Fall aus, dass die  $Z_i$  Poisson-verteilt mit Parameter  $\theta/i$  sind. Diese Verteilung wird auch als die Ewens Sampling Formel bezeichnet und für  $\theta = 1$  ist das die Konstruktion der Menge der Permutationen. Damit können wir das Verhalten von  $T_{0n}$  bestimmen. Mit der Rekursion für poisson-verteilte Zufallsvariablen gilt

$$\begin{aligned} k\Pr(T_{0n} = k) &= \theta\Pr(T_{0n} = k - 1) + \theta \sum_{j=1}^n \Pr(T_{0n} = (k - 1) - j) = \\ &= \theta\Pr(T_{0n} = k - 1) + (k - 1)\Pr(T_{0n} = k - 1). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\Pr(T_{0n} = k) = \frac{(\theta + k - 1)(\theta + k - 2) \dots (\theta)}{k!} \Pr(T_{0n} = 0).$$

Ist  $h(n) := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$  und  $\theta^{(k)} = \theta(\theta - 1) \dots (\theta - k + 1)$ , dann gilt  $\Pr(Z_i = 0) = e^{-\theta/i}$  und damit

$$\Pr(T_{0n} = k) = e^{-\theta h(n+1)} \frac{\theta^{(k)}}{k!}.$$

Damit können wir die Dichte von  $T_{0n}$  bestimmen:

**Satz 8.1.** Für Poisson-verteilte Zufallsvariablen  $Z_i$  mit Erwartungswert  $\theta/i$  konvergieren die Zufallsvariablen  $n^{-1}T_{0n}(Z)$  in der Wahrscheinlichkeit gegen die Zufallsvariable  $X_\theta$  mit

$$\mathbb{E}(e^{-sX_\theta}) = \exp\left(-\int_0^1 (1 - e^{-sx})\right).$$

Die Dichte von  $X_\theta$  ist durch

$$p_\theta(x) = \frac{e^{-\gamma\theta} x^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\theta)^k}{k!} \int_{I_k(x)} \left(1 - \sum_{j=1}^k y_j\right)^{\theta-1} \frac{dy_1 \dots dy_k}{y_1 \dots y_k}\right)$$

mit

$$I_k(x) = \{y_i > x^{-1}, i = 1 \dots k; y_1 + \dots + y_k < 1\}$$

gegeben.

*Beweis.* Es gilt, weil  $T_{0n}$  eine Summe von unabhängigen Poisson-verteilten Zufallsvariablen ist,

$$\mathbb{E}(e^{-sT_{0n}/n}) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{\theta}{i} (1 - e^{-si/n})\right)$$

$$\sim \exp\left(-\int_0^1 (1 - e^{-sx}) \frac{\theta}{x} dx\right).$$

Für die Dichte von  $X_\theta$  verwenden wir wieder das Exponentielle Integral mit

$$\int_0^x \frac{1 - e^{-y}}{y} dy = \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy + \log x + \gamma$$

und daraus ergibt sich aus der Taylorreihe der Exponentialfunktion

$$\mathbb{E}(e^{-sX_\phi}) = e^{-\theta\gamma} s^{-\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\theta)^k}{k!} \left(\int_s^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy\right)^k.$$

Es ist  $s^{-\theta}$  die Laplace-Transformierte von  $x^{\theta-1}/\Gamma(\theta)$  und daraus erhalten wir

$$s^{-\theta} e^{-sy} = \int_y^\infty e^{-sx} \frac{(x-y)^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} dx$$

und damit

$$\begin{aligned} s^{-\theta} \left(\int_s^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy\right)^k &= \int_1^\infty \cdots \int_1^\infty \frac{s^{-\theta} e^{-s(v_1+\dots+v_k)}}{v_1 \dots v_k} dv_1 \dots dv_k \\ &= \int_1^\infty \cdots \int_1^\infty \int_{v_1+\dots+v_k}^\infty e^{-sx} \frac{(x - (v_1+\dots+v_k))^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} dx \frac{dv_1 \dots dv_k}{v_1 \dots v_k} \\ &= \int_0^\infty e^{-sx} \frac{x^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} \int_{I_1} \cdots \int_{I_k} (1 - (y_1 + y_2 + \dots + y_k))^{\theta-1} \frac{dy_1 \dots dy_k}{y_1 \dots y_k}. \end{aligned}$$

Nachdem die momenterzeugende Funktion die Dichte eindeutig bestimmt, ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

Wir können analog die Dichte der Verteilung von  $T_{bn}$  bestimmen, wenn  $b$  linear mit  $n$  wächst.

**Satz 8.2.** Für  $Z_i \sim Po(\theta/i)$  und  $b/n \rightarrow \alpha$  konvergiert  $n^{-1}T_{bn}$  in der Verteilung gegen  $X_\theta^{(\alpha)}$  mit

$$\mathbb{E}\left(e^{sX_\theta^{(\alpha)}}\right) = \exp\left(-\int_\alpha^1 (1 - e^{-sx}) \frac{\theta}{x} dx\right).$$

Die Dichte von  $X_\theta^{(\alpha)}$  ist durch

$$p_\phi^{(\alpha)}(x) = \alpha^\theta \left(\frac{\theta}{x} \mathbb{1}_{\alpha \leq x \leq 1}\right) + \sum_{k=2}^{x/\alpha} \frac{\theta^k}{k!} \int_{J_k(\alpha, x)} \left(x - \sum_{j=1}^{k-1} y_j\right)^{-1} \frac{dy_1 \dots dy_{k-1}}{y_1 \dots y_{k-1}}$$

mit

$$J_k(\alpha, x) = \{\alpha < y_i < 1, i = 1, \dots, k-1; \alpha < x - y_1 - \dots - y_{k-1} < 1\}$$

für  $k \geq 2$  gegeben.

*Beweis.* Es gilt

$$\mathbb{E}e^{-sX_\theta^{(\alpha)}} = \alpha^\theta \exp\left(\theta \int_\alpha^1 \frac{e^{-sy}}{y} dy\right)$$

und damit

$$\int_0^\infty e^{-sx} p_\theta^{(\alpha)} = \alpha^\theta \left( \theta \int_0^1 \frac{e^{-sx}}{x} dx + \sum_{n \geq 2} \frac{\theta^n}{n!} \int_\alpha^1 \cdots \int_\alpha^1 \frac{e^{-sy_1}}{y_1} \cdots \frac{e^{-sy_n}}{y_n} dy_1 \cdots dy_n \right).$$

Mit  $x = \sum_{i=1}^n y_i$  ergibt sich

$$\alpha^\theta \int_0^\infty e^{-sx} \left( \frac{\theta}{x} \mathbb{1}_{\alpha \leq x \leq 1} + \int_{n=2}^{x/\alpha} \frac{\theta^n}{n!} \int_{J_1(\alpha, x)} \cdots \int_{J_k(\alpha, x)} \left( x - \sum_{j=1}^{n-1} y_j \right)^{-1} \frac{dy_1 \cdots dy_{n-1}}{y_1 \cdots y_{n-1}} \right) dx$$

und damit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

Eine Eigenschaft von  $p_\theta^{(\alpha)}$ , die wir hier nicht beweisen werden, aber später benötigen werden ist

$$xp_\theta^{(\alpha)} = \theta P_\theta[x-1, x-\alpha],$$

wenn wir  $P_\theta[a, b] = Pr(a \leq X_\theta \leq b)$  schreiben. Dies gilt ebenso für  $p_\theta$  mit  $\alpha = 0$  und folgt aus dem Verhalten von  $T_{0n}/n$ , wenn die  $Z_i$  Poisson( $\theta/i$ ) verteilt sind. Aus der Definition folgt auch für  $x \leq 1$

$$p_\theta(x) = \frac{e^{-\gamma\theta} x^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)}, \quad P_\theta[0, x] = \frac{e^{-\gamma\theta} x^\theta}{\Gamma(\theta+1)}.$$

Wir haben also für eine Struktur mit Poisson ( $\theta/i$ )-verteilten Zufallsvariablen die Konvergenz von  $n^{-1}T_{bn}$  gegen  $p_\theta$  beziehungsweise  $p_\theta^{(\alpha)}$  gezeigt. Wenn andererseits für irgendeine logarithmische Struktur  $n^{-1}T_{bn}$  gegen  $p_\theta$  beziehungsweise  $p_\theta^{(\alpha)}$  konvergiert, dann erhalten wir einige Informationen über das Verhalten der Komponentengrößen. Wir nehmen also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbf{Pr}(T_{bn} = m) = p_\phi(y)$$

für  $m/n \rightarrow y \in (0, \infty)$  und  $b = o(n)$  an. Weiters nehmen wir für  $\lim_{n \rightarrow \infty} b/n = \alpha$  für  $0 < \alpha < 1$  und  $y \neq \{1, \alpha\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbf{Pr}(T_{bn} = m) = p_\theta^{(\alpha)}(y)$$

an. Dann können wir nämlich Ergebnisse für Poisson-verteilte Zufallsvariablen betrachten und die Differenz abschätzen. Zunächst zeigen wir die Konvergenz des Komponentenvektors.

**Satz 8.3.** *Für eine logarithmische Struktur mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbf{Pr}(T_{bn} = m) = p_\theta$  für  $b = o(n)$  gilt*

$$(C_1^{(n)}, \dots) \rightarrow_d (Z_1, Z_2, \dots)$$

*Beweis.* Es sei  $b$  fest gewählt und wir betrachten die Zufallsvektoren  $(C_1^{(n)}, \dots, C_b^{(n)})$ , beziehungsweise  $(Z_1, \dots, Z_b)$ . Es gilt für einen Vektor  $a = (a_1, \dots, a_b) \in \mathbb{Z}_+^b$  wegen der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{Pr}(C_1^{(n)} = a_1, C_b^{(n)} = a_b) = \mathbf{Pr}(Z_1 = a_1, \dots, Z_b = a_b) \frac{\mathbf{Pr}(T_{bn} = n - T_{0b}(a))}{\mathbf{Pr}(T_{0n} = n)}$$

mit  $T_{0b}(a) = \sum_{j=0}^b j a_j$ . Nachdem wir bereits gezeigt haben, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \mathbf{Pr}(T_{bn} = m)) = p_\theta(y)$  für  $y = m/n$  und  $b = o(n)$  gilt, folgt die Behauptung.  $\square$

Wir führen  $\omega_\phi(u) := p_\theta^{(1/u)}(1)$  ein, dann läßt sich durch Integralsubstitution

$$p_\theta^{(\alpha)}(\beta) = \beta^{\theta-1} \omega_\theta(\beta/\alpha)$$

zeigen.  $\omega_\theta$  erweist sich wieder als die verallgemeinerte Buchstab-Funktion, wir werden diese Tatsache allerdings nicht beweisen.

**Satz 8.4.** *Wir betrachten eine logarithmische Struktur, die  $\lim n \mathbf{Pr}(T_{bn} = m) = p_\theta(y)$  und  $\lim n \mathbf{Pr}(T_{bn} = m) = p_\theta^{(\alpha)}(y)$  erfüllt, für die zusätzlich*

$$a = \sum_{j=1}^{\infty} \left( -\log(\mathbf{Pr}(Z_j) = 0) - \frac{\theta}{j} \right)$$

existiert und endlich ist. Dann gilt für  $u > 0$  für die Größe der kleinsten Komponente  $Y_1^{(n)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left( Y_1^{(n)} > n/u \right) \sim n^{-\theta} e^{-a} \Gamma(\theta) u^\theta \omega_\theta(u).$$

*Beweis.* Es gilt für ein beliebiges  $b \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbf{Pr}(Y_1^{(n)} = b) &= \mathbf{Pr}(C_1^{(n)} = 0, \dots, C_{b-1}^{(n)} = 0, C_b^{(n)} \geq 1) \\ &= \mathbf{Pr}(C_1^{(n)} = 0, \dots, C_{b-1}^{(n)} = 0, C_b^{(n)} = 1) + \mathbf{Pr}(C_1^{(n)} = 0, \dots, C_{b-1}^{(n)} = 0, C_b^{(n)} \geq 2). \end{aligned}$$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass es genau eine kleinste Komponente gibt, gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbf{Pr}(C_1^{(n)} = 0, \dots, C_{b-1}^{(n)} = 0, C_b^{(n)} = 1) &= \\ &= (\mathbf{Pr}(Z_1 = 0, \dots, Z_{b-1} = 0, Z_b = 1)) \frac{\mathbf{Pr}(T_{bn} = n - b)}{\mathbf{Pr}(T_{0n} = n)}. \end{aligned}$$

und mit der Abschätzung der harmonischen Summe durch  $h(n) \sim \gamma + \ln n$  erhalten wir

$$\mathbf{Pr}(Z_1 = 0, \dots, Z_{b-1} = 0) \sim \left( \frac{u}{n} \right)^\theta e^{-a} e^{-\gamma\theta}.$$

Zusammen mit  $\mathbf{Pr}(Z_b = 1) \sim \frac{\theta}{b}$  und dem Verhalten von  $\mathbf{Pr}(T_{bn} = m)$  erhalten wir mit  $p_\phi^{(\alpha)}(\beta) = \beta^{\theta-1} \omega_\theta(\beta/\alpha)$

$$\begin{aligned} \mathbf{Pr}(C_1^{(n)} = 0, \dots, C_{b-1}^{(n)} = 0, C_b^{(n)} = 1) &\sim \frac{\theta u}{n} \left( \frac{u}{n} \right)^\theta e^{-a} e^{-\gamma\theta} \frac{p_\theta^{(1/u)}(1 - 1/u)/n}{e^{-\gamma\theta}/(n\Gamma(\theta))} \\ &\sim \frac{e^{-a} \Gamma(\theta + 1) (u - 1)^{\theta-1} u^2 \omega_\theta(u - 1)}{n^{\theta+1}}. \end{aligned}$$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass zwei oder mehr Komponenten die kleinste Komponentengröße annehmen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{Pr}(C_1^{(n)} = 0, \dots, C_{b-1}^{(n)} = 0, C_b^{(n)} \geq 2) &= \\ &= \frac{\mathbf{Pr}(Z_1 = 0, \dots, Z_{b-1} = 0)}{\mathbf{Pr}(T_{0n} = n)} \sum_{j=2}^{n/b} \mathbf{Pr}(Z_b = j) \mathbf{Pr}(T_{bn} = n - jb) \end{aligned}$$

Es lässt sich zeigen, dass sich dieser Term wie  $o(n^{-\theta-1})$  verhält und daraus erhalten wir die Behauptung.  $\square$

Ähnlich können wir die Verteilung der größten Komponenten bestimmen. Wir bezeichnen diese mit

$$L_1^{(n)} \geq L_2^{(n)} \geq L_2^{(n)} \geq \dots$$

und wollen die gemeinsame Verteilung  $(L_1, \dots, L_k)$  bestimmen.

**Definition 32.** Ein stochastischer Prozess  $N_t$ ,  $t \geq 0$  ist ein inhomogener Poisson-Prozess mit Intensitätsfunktion  $\lambda(t) \geq 0$ , wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind

- $N_0 = 0$  fast sicher.
- Die Zuwächse  $N_{t+s} - N_t$  sind unabhängig für disjunkte Intervalle.
- $N_{t+s} - N_s$  ist für  $\Gamma(t) := \int_0^t \lambda(x) dx$  für alle  $s, t \geq 0$   $Po(\Gamma(s+t) - \Gamma(s))$ -verteilt.

Der Prozess kann so interpretiert werden, dass die Häufigkeit des Auftretens eines Ereignisses gezählt wird.

**Definition 33.** Es sei  $Z_t$  ein Poisson-Prozess mit Intensität  $\theta e^{-x}/x$ . Dann betrachten wir die Ereignisse  $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots$  und die Zufallsvariable  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots$ . Dann ist die Poisson-Dirichlet-Verteilung durch die Verteilung von  $\sigma_1/\sigma, \sigma_2/\sigma, \dots$  gegeben.

Es gilt

$$X_\theta = \int_0^1 x M dx,$$

wobei  $M$  der Poisson-Prozess mit Intensität  $\theta x^{-1}$  ist. Wenn  $0 < \dots < \tau_2 < \tau_1 < 1 < \tau_0 < \tau_{-1} < \dots < \infty$  die Punkte dieses Poisson-Prozesses sind, dann lässt sich

$$\mathcal{L}((L_1, L_2, \dots)) = \mathcal{L}(\tau_1, \tau_2, \dots | X_\theta = 1)$$

zeigen, wobei  $(L_1, L_2, \dots)$  Poisson-Dirichlet-verteilt sind. Aus der gemeinsamen Verteilung ergibt sich dann die Randdichte durch

$$f_\theta^{(r)}(x_1, \dots, x_r) = \frac{e^{\gamma\theta} \theta^r \Gamma(\theta) x_r^{\theta-1}}{x_1 \dots x_r} p_\theta \left( \frac{1 - x_1 - \dots - x_r}{x_r} \right).$$

**Satz 8.5.** Es gelte  $\lim(n \Pr(T_{bn} = m) = p_\theta(y))$  für  $b = o(n)$  und für  $r \geq 1 \in \mathbb{N}$  sei eine Folge  $0 < x_r < x_{r-1} < \dots < x_1 < 1$  gegeben, für die  $0 < s_r = \sum_{i=1}^r x_i < 1$  und  $x_r^{-1}(1 - s_r) \notin \mathbb{Z}$  gilt. Für Folgen  $m_i(n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} m_i(n) = x_i$  gilt für die Punktwahrscheinlichkeiten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^r \Pr(L_i^n = m_i(n)) = f_\theta^{(r)}(x_1, \dots, x_r),$$

also erfüllt die Verteilung der  $r$ -größten Komponenten

$$n^{-1}(L_1^{(r)}, L_2^{(r)}, \dots) \rightarrow_d (L_1, L_2, \dots) \sim PD(\theta),$$

wobei  $PD$  die Poisson-Dirichlet-Verteilung darstellt.

*Beweis.* Wir betrachten  $m = m_1 + \dots + m_r \leq n$  und bezeichnen mit  $A_n(C^{(n)})$  das Ereignis, dass für  $i \geq m_r + 1$  die Komponenten  $C_i^{(n)}$  genau für  $i = m_k$   $C_i^{(n)} = 1$  erfüllen und ansonsten  $C_i^{(n)} = 0$  gilt.  $A_n(Z)$  ist äquivalent für  $Z_i$  definiert. Dann gilt

$$\Pr(L_1^{(n)} = m_1, \dots, L_r^{(n)} = m_r) = \Pr(A_n(C^{(n)}), C_{m_r}^{(n)} \geq 1).$$

Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich wieder aufteilen in

$$\Pr(A_n(C^{(n)}), C_{m_r}^{(n)} = 1) + \Pr(A_n(C^{(n)}), C_{m_r}^{(n)} \geq 2).$$

Für den ersten Summanden gilt dann

$$\begin{aligned} \Pr(A_n(C^{(n)}), C_{m_r}^{(n)} = 1) &= \Pr(A_n(Z), Z_{m_r} = 1 | T_{0n} = n) \\ &= \Pr(A_n(Z)) \Pr(Z_{m_r} = 1) \frac{\Pr(T_{0, m_r-1} = n - m)}{\Pr(T_{0n} = n)} \\ &= \frac{\Pr(T_{0, m_r-1} = n - m)}{\Pr(T_{0n} = n)} \prod_{i=m_r}^n \Pr(Z_i = 0) \prod_{j=1}^r \frac{\Pr(Z_{m_j} = 1)}{\Pr(Z_{m_j} = 0)}. \end{aligned}$$

Nun lässt sich der erste Bruch durch  $\lim n \Pr(T_{0n} = m) = p_\theta(x)$  abschätzen und ergibt

$$x_r^{-1} p_\theta((1 - s_r)/x_r) / p_\theta(1)$$

und das erste Produkt lässt sich wegen  $\Pr(Z_i \geq 2) \leq \mathbb{E}(Z_i) - \Pr(Z_i = 1) \rightarrow 0$  als  $\Pr(Z_i = 0) = 1 - \theta i^{-1} + o(i^{-1})$  darstellen und hat wegen  $\sum_{n x_r}^n \log(1 - \theta/i) \sim \sum_{i=n x_r}^n \theta/i \sim \log n - \log x n$  die Form  $x_r^\theta$  und das zweite Produkt ist asymptotisch  $n^{-r} \theta^r x_1^{-1} \dots x_r^{-1}$ . Damit ergibt sich

$$\lim n^r \Pr(A_n(C^{(n)}), C_{m_r} = 1) = f_\theta^{(r)}(x_1, \dots, x_r).$$

Es ist noch zu zeigen, dass  $\Pr(A_n(C^{(n)}), C_{m_r} \geq 2)$  vernachlässigbar ist. Das gilt aber, weil

$$\begin{aligned} &\Pr(A_n(Z)) \sum_{l=2}^{n/m_r} \Pr(Z_{m_r} = l) \frac{\Pr(T_{0, m_r-1} = n - m - (l-1)m_r)}{\Pr(T_{0n} = n)} \\ &\leq \frac{\Pr(A_n(Z)) \Pr(Z_{m_r} \geq 2)}{\Pr(T_{0n} = 0)} \max(\Pr(T_{0, m_r-1} = n - m - (l-1)m_r)), \end{aligned}$$

$\Pr(A_n(z)) \leq \prod_{i=1}^{r-1} \Pr(Z_{m_i} = 1) = O(n^{-r+1})$  und  $\Pr(Z_{m_r} \geq 2) = o(m_r^{-1})$ . Damit gilt für den ersten Faktor ein Verhalten der Form  $o(n^{-(r-1)})$  und der zweite erfüllt  $O(n^{-1})$ . Damit ist dieser Summand vernachlässigbar und mit dem Satz von Scheffé erhalten wir aus der punktweisen Konvergenz die Konvergenz in der Verteilung.  $\square$

Wir wollen für einige Konstruktionen zeigen, dass die vorherigen Sätze gelten. Dafür benötigen wir zuerst eine Abschätzung der Differenz zwischen den einzelnen Komponentengrößen.

**Lemma 3.** *Für die Totalvariation zwischen Verteilungen  $Z_i$ , die zu einer logarithmischen Konstruktion gehören und Poisson-verteilten Zufallsvariablen  $Z_i^*$  mit Erwartungswert  $\theta/i$  gilt*

$$d_{TV}(\mathcal{L}(Z_i), \mathcal{L}(Z_i^*)) \leq o(1) i^{-1}$$

für  $i \rightarrow \infty$

*Beweis.* Es gilt

$$2d_{TV}(\mathcal{L}(Z_i), \mathcal{L}(Z_i^*)) = \sum_{j=0}^{\infty} |\Pr(Z_i = j) - \Pr(Z_i^* = j)|$$



$$\leq |\Pr(Z_i = 0) - \Pr(Z_i^* = 0)| + |\Pr(Z_i = 1) - \Pr(Z_i^* = 1)| + \Pr(Z_i \geq 2) + \Pr(Z_i^* \geq 2)$$

Nun gilt aber sowohl für  $Z_i$  als auch für  $Z_i^*$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Z_i &= \Pr(Z_i = 1) + \sum_{j=2}^{\infty} j\Pr(Z_i = j) \\ &\geq \Pr(Z_i = 1) + 2\Pr(Z_i \geq 2) \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$2i\Pr(Z_i \geq 2) \leq i(\mathbb{E}Z_i - \Pr(Z_i = 1)) \rightarrow 0$$

und insgesamt  $\Pr(Z_i \geq 2) + \Pr(Z_i^* \geq 2) \rightarrow o(1)i^{-1}$ . Weil wir  $i\Pr(Z_i = 1) \rightarrow \theta$  und  $i\Pr(Z_i^* = 1) \rightarrow \theta$  annehmen, gilt auch  $\Pr(Z_i = 0) = 1 - \frac{\theta}{i} + o(i^{-1})$  und damit ergibt sich die Behauptung  $\square$

**Satz 8.6.** *Es sei für eine logarithmische Struktur  $b = b(n) = o(n)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann gilt*

$$n^{-1}T_{bn} \rightarrow_d X_\theta$$

mit

$$\mathbb{E}(e^{-sX_\theta}) = \exp\left(-\int_0^1 (1 - e^{-sx}) \frac{\theta}{x} dx\right)$$

*Beweis.* Wir betrachten unabhängige, Poisson-verteilte Zufallsvariablen  $Z_i^*$  mit Erwartungswert  $\theta/i$  und  $T_{bn}^*$  die Summe der Komponentengrößen. Dann ist bereits gezeigt, dass  $d_{TV}(\mathcal{L}(Z_i), \mathcal{L}(Z_i^*)) \leq \epsilon(i)i^{-1}$  mit  $\epsilon(i) \rightarrow 0$ . Wir betrachten zuerst eine Folge  $b(n) = o(n)$  mit der zusätzlichen Eigenschaft  $\epsilon(b) \log(n/b) \rightarrow 0$ . Dann gilt

$$d_{TV}(\mathcal{L}(T_{bn}), \mathcal{L}(T_{bn}^*)) \leq \sum_{j=b+1}^n \epsilon(j)j^{-1} \leq \epsilon(b) \log\left(\frac{n}{b}\right)$$

damit gilt dann auch

$$n^{-1}T_{bn} \rightarrow_d X_\theta$$

Ist nun  $b_n$  eine beliebige Folge  $b_n = o(n)$ , dann gibt es eine Folge  $b'_n \geq b_n$  mit  $b'_n = o(n)$  und  $\epsilon(b) \log(n/b) \rightarrow 0$  und dann können wir die Summe an  $b'_n$  aufteilen und erhalten

$$n^{-1}T_{bn} = n^{-1}T_{bb'} + n^{-1}T_{b'n}.$$

Aus dem ersten Teil folgt, dass  $n^{-1}T_{b'n} \rightarrow_d X_\theta$  gilt. Für die erste Summe haben wir

$$\mathbb{E}(n^{-1}T_{bb'}) = n^{-1} \sum_b^{b'} i\mathbb{E}(Z_i) \leq \bar{\theta}n^{-1}b' \rightarrow 0,$$

wenn wir  $\bar{\theta} := \sup_i(\mathbb{E}(Z_i)/i)$  schreiben.  $\square$

Wir können beispielsweise eine Konstruktion betrachten, in der die  $Z_i$  Poisson-verteilt sind, aber mit Erwartungswert  $\mathbb{E}(Z_j) = \lambda_j$  mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} j\lambda_j = \theta$ . Wir verwenden die Rekursion für Poisson-verteilte Zufallsvariablen

$$k\Pr(T_{bn} = k) = \sum_{j=b+1}^n \Pr(T_{bn} = k-j)j\lambda_j$$

und wir können die Rekursion in der Form

$$k\mathbf{Pr}(T_{bn} = k) = \theta\mathbf{Pr}(k - n \leq T_{bn} \leq k - b) + r_n(k)$$

mit

$$r_n = \sum_{j=b+1}^n \mathbf{Pr}(T_{bn} = k - j)(j\lambda_j - \theta)$$

schreiben. Für den ersten Summanden ergibt sich nach Multiplikation mit  $n/m \rightarrow y^{-1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\mathbf{Pr}(T_{bn} = m) = y^{-1}\theta\mathbf{Pr}(y - 1 \leq X_\theta \leq y) \sim p_\theta(y),$$

weil  $n^{-1}T_{bn} \rightarrow_d X_\theta$  gilt.

Sei nun  $\epsilon > 0$  fest und  $j_0$  so groß gewählt, dass  $|j\lambda_j - \theta| < \epsilon$  für  $j > j_0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} r_n(k) &= \sum_{j=1}^{j_0} \mathbf{Pr}(T_{bn} = k - j)|\lambda_j j - \theta| + \epsilon \sum_{j=j_0+1}^k \mathbf{Pr}(T_{bn} = k - j) \\ &\leq \max_{j \leq j_0} |j\lambda_j - \theta| \mathbf{Pr}(k - j_0 \leq T_{bn} \leq k - 1) + \epsilon \end{aligned}$$

und nachdem  $n^{-1}T_{bn}$  in der Verteilung gegen  $X_\theta$  konvergiert und  $j_0$  fest ist, erhalten wir  $\lim_n r_n(k) \leq \epsilon$ . Für  $p_\theta^{(\alpha)}$  funktioniert eine ähnliche Argumentation, weil  $b(n) = \alpha n$  die Bedingung  $\epsilon(\alpha(n)) \log(n/\alpha n) \rightarrow 0$  natürlich erfüllt. Damit können wir die vorigen Sätze auch hier anwenden. Wir wollen die vorigen Ergebnisse im nächsten Abschnitt noch etwas genauer zeigen.

## 8.2 Etwas genauere Ergebnisse für logarithmische Strukturen

Wir skizzieren die Vorgangsweise für allgemeinere Strukturen, ohne dabei sehr ins Detail zu gehen. Wir werden das selbe asymptotische Verhalten wie im vorigen Abschnitt, allerdings mit Konvergenzgeschwindigkeiten und einige zusätzliche Ergebnisse erhalten. Der selbe Ansatz wird auch im nächsten Abschnitt über konvergente Strukturen verwendet.

Die Poisson-Verteilung ist unendlich teilbar, das heißt, es gibt für eine Poisson( $\lambda$ )-verteilte Zufallsvariable  $X$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$ , so dass die  $X_i$  unabhängig und identisch verteilt sind und

$$X = X_1 + \dots + X_n$$

gilt. Hier sind die Summanden Poisson-verteilt mit Parameter  $\lambda/n$ . Das Gesetz der kleinen Zahlen besagt auch, dass sich eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert  $\lambda$  als Limes einer Summe von  $n$  unabhängigen Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert  $\lambda/n$  darstellen lässt. Wir wählen also Voraussetzungen, so dass sich die betrachteten Strukturen in dieser Hinsicht ähnlich verhalten

Wie im vorigen Abschnitt betrachten wir Strukturen, deren Komponentenvektor sich mit der Bedingung der bedingten Wahrscheinlichkeit aus unabhängigen Zufallsvariablen  $Z_i$  zusammensetzt. Als nächstes nehmen wir an, dass es für jedes  $i$  ein  $r(i) \geq 1$  und unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen  $Z_{ij}$  gibt, so dass

$$Z_i = \sum_{j=1}^{r(i)} Z_{ij}$$

gilt. Diese Bedingung ist offensichtlich für  $r(i) = 1$  immer erfüllt, allerdings sollte  $r(i)$  möglichst groß sein, damit diese Schreibweise nützlich ist. Die Verteilung der  $Z_{ij}$  ist idealerweise nahe einer Bernoulliverteilung mit Erwartungswert  $\frac{\theta}{ir_i}$ . Unser Ziel ist, das Verhalten der durch  $Z_i$  erzeugten Konstruktionen mit dem Verhalten von Konstruktionen vergleichen, deren Komponentenvektoren sich wie unabhängige,  $\text{Poisson}(\theta/i)$ -verteilte Zufallsvariablen verhalten. Wir schreiben die  $Z_{ij}$  in der Form

$$\Pr(Z_{ij} = 0) = 1 - \frac{\theta}{ir_i}(1 + E_{i0})$$

$$\Pr(Z_{ij} = 1) = \frac{\theta}{ir_i}(1 + \epsilon_{i,1}), \quad \Pr(Z_{ij} = l) = \frac{\theta}{ir_i}\epsilon_{il}$$

mit  $E_{i0} = \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_{i,j}$ . Die Ergebnisse in diesem Abschnitt gelten, wenn es Konstanten  $g_1, C > 0$  und  $a_1, a_2 > 1$  mit  $\epsilon_{i,l} = O(i^{-g_1})$  und  $l\epsilon_{il} \leq Ci^{-a_1}l^{-a_2}$  gibt. Weiters nehmen wir  $|\epsilon_{i,1} - \epsilon_{i+1,1}| = O(i^{-g_2})$  für ein  $g_2 > 1$  an.

Wir bezeichnen wieder Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert  $\theta/i$  mit  $Z_i^*$ . Die sich ergebende zusammengesetzte Poisson-verteilte Zufallsvariable der Komponentenvektoren  $\leq m$  bezeichnen wir mit  $CP(\lambda^{(m)}) := \sum_{k=1}^m kZ_k^*$  und den Erwartungswert von  $f$  als  $CP(\lambda^{(m)}(f))$ . Der steinsche Operator  $S_m$  für  $CP(\lambda^{(m)})$  ist dann durch

$$S_m g(\omega) = \sum_{i=1}^m i\lambda_i g(\omega + i) - \omega g(\omega)$$

gegeben und für eine beschränkte Funktion  $f$  und eine Zufallsvariable  $Z$  ist  $g_f$  die Lösung der Stein-Gleichung

$$\mathbb{E}(f(Z) - CP(\lambda^{(m)}(f))) = \mathbb{E}(S_m g_f)(Z).$$

Wir werden die Darstellung des Stein-Operators als Erzeuger eines Geburts- und Todesprozesses verwenden, um eine obere Schranke für das Verhalten der Stein-Funktion zu erhalten.

**Lemma 4.** *Für die Klasse von Testfunktionen*

$$\mathcal{F} = \{\mathbb{1}_A, A \subset \mathbb{Z}_+\}$$

bezeichnen wir die Steinfunktion von  $CP(\lambda^{(m)})$  und  $\mathbb{1}_A$  mit  $g_{mA}$ . Dann gilt

$$|g_{mA}(\omega)| \leq \inf \left( 1, \frac{1 + \theta h(m+1)}{\omega} \right),$$

wobei  $h$  die harmonische Reihe ist.

*Beweis.* Wir schreiben die Lösung der Steinschen Gleichung  $g_{mA}$  in der Form  $g_{mA}(\omega) = q_{mA}(\omega) - q_{mA}(\omega - 1)$ . Dann gilt  $S_m g_{mA} = \mathcal{A}q_{mA}$ , wobei  $\mathcal{A}$  der infinitesimale Erzeuger des dazugehörigen Geburts- und Todesprozesses  $\zeta(t)$  ist. Damit erhalten wir

$$q_{mA}(\omega) = \int_0^{\infty} (Pr(\zeta(t) \in A | \zeta(0) = \omega) - (CP(\lambda)^{(m)})(\mathbb{1}_A)) dt.$$

Dann gilt

$$q_{mA}(\omega) - q_{mA}(\omega + k) = \int_0^{\infty} Pr(\zeta(t) \in A | \zeta(0) = \omega) - Pr(\zeta(t) \in A | \zeta(0) = \omega + k) dt.$$

Ist  $D(t)$  ein reiner Todesprozess mit Todesrate  $i$  und Startwert  $k$  und  $\zeta_0$  der Geburts- und Todesprozess von vorher mit Startwert  $\omega$ , dann lässt sich der Prozess mit Startwert  $\omega + k$  als  $\zeta_0(t) + D(t)$  schreiben und wenn wir den Zeitpunkt von  $D(t) = 0$  mit  $v_0$  bezeichnen, gilt

$$\left| \sum_{i=1}^k g_{mA}(\omega + i) \right| = q_{mA}(\omega) - q_{mA}(\omega + k) = \int_0^\infty \mathbb{E}(\mathbb{1}(\zeta_0(t) + D(t) \in A) - \mathbb{1}(\zeta_0(t) \in A)) dt \leq \\ \leq \mathbb{E}(v_0) = h(k + 1).$$

Für  $k = 1$  erhalten wir 1, andererseits gilt  $\sum_{i=1}^m g_{mA}(\omega + i) \leq h(m + 1) = \omega g_{mA}(\omega)$  wegen der Steinschen Formel.  $\square$

Ebenfalls mit dieser Darstellung lässt die folgende schärfere Variante für Intervalle zeigen, die wir nicht beweisen werden

**Lemma 5.** *Ist  $A$  ein Intervall der Form  $A = [0, x - 1]$ , dann gilt*

$$0 \leq g_{mA}(\omega) \leq \frac{1 + \theta}{x + \theta} \left( \inf \left( 1, \frac{x}{\omega + 1} \right) \right).$$

Wir schreiben nun  $T_{vm}^{(i)} := T_{vm} - iZ_{i1}$  und schreiben  $\mathbb{E}(T_{vm}g(T_{vm}))$  als eine Art Rekursion mit Störfaktoren. Allgemein schreiben wir  $T_{vm}(Z)$  beziehungsweise  $T_{vm}(Z^*)$ , falls nicht offensichtlich ist, auf welche Konstruktion wir uns beziehen.

**Lemma 6.** *Sei  $g$  eine beschränkte Funktion, dann gilt*

$$\mathbb{E}(T_{vm}g(T_{vm})) = \theta \sum_{i=v+1}^m \mathbb{E}g(T_{vm}(Z) + i) + \theta \sum_{j=1}^3 \eta_j^{(vm)}(g)$$

mit

$$\eta_1^{(vm)}(g) = \sum_{i=v+1}^m \sum_{l \geq 1} l \epsilon_{il} \mathbb{E}g(T_{vm}^{(i)}(Z) + il)$$

$$\eta_3^{(vm)}(g) = \sum_{i=v+1}^m \frac{\theta}{ir_i} (1 + \epsilon_{i1}) (\mathbb{E}g(T_{vm}^{(i)}(Z) + i) - \mathbb{E}g(T_{vm}^{(i)}(Z) + 2i))$$

$$\eta_2^{(vm)}(g) = - \sum_{i=v+1}^m \frac{\theta}{ir_i} \left( \sum_{l \geq 2} \epsilon_{il} \mathbb{E}g(T_{vm}^{(i)}(Z) + i(l + 1)) - E_{i1} \mathbb{E}g(T_{vm}^{(i)}(Z) + i) \right),$$

insbesondere gilt für  $g = \mathbb{1}_s$

$$s \Pr(T_{vm}(Z) = s) = \theta \Pr(s - m \leq T_{vm}(Z) < s - v) + \theta \sum_{j=1}^3 \eta_j^{(vm)}(\mathbb{1}_s).$$

*Beweis.* Wir erhalten, nachdem  $T_{vm}^{(i)}$  und  $Z_{i1}$  unabhängig sind, aus dem Punktwahrscheinlichkeiten von  $Z_{i1}$

$$\mathbb{E}(Z_{ij}g(T_{vm}(Z))) = \frac{\theta}{ir_i} \mathbb{E}g(T_{vm}^{(i)} + i) + \sum_{l \geq 1} \frac{\theta}{ir_i} l \epsilon_{il} \mathbb{E}g(T_{vm}^{(i)}(Z) + il).$$

Daraus folgt dann

$$\mathbb{E}T_{vm}(Z)g(T_{vm}(Z)) = \theta \sum_{i=v+1}^m \left( \mathbb{E}g(T_{bn}^{(i)} + i) + \sum_{l \geq 1} l \epsilon_{il} \mathbb{E}g(T_{vm}^{(i)}(Z) + il) \right),$$

wobei die zweite Summe  $\eta_1$  ist und wegen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}g(T_{vm}(Z) + i) &= \mathbb{E}g(T_{vm}^{(i)}(Z) + iZ_{i1} + i) = \mathbb{E}g(T_{vm}^{(i)}(Z) + i) + \\ &+ \frac{\theta}{i r_i} (1 + \epsilon_{i1}) (\mathbb{E}g(T_{vm}^{(i)}(Z) + 2i) - \mathbb{E}g(T_{vm}^{(i)}(Z) + i)) + \\ &+ \frac{\theta}{i r_i} \sum_{l \geq 2} \epsilon_{il} (\mathbb{E}g(T_{vm}^{(i)}(Z) + i(l+1)) - \mathbb{E}g(T_{vm}^{(i)}(Z) + i)) \end{aligned}$$

erhalten wir mit  $\sum_{l \geq 2} \epsilon_{il} = E_{i1}$  die Behauptung.  $\square$

Wir werden bei den konvergenten Strukturen eine ähnliche, allerdings etwas einfachere Rekursion erhalten. Der Zusammenhang mit der Steinschen Formel ist nun

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((S_m g)(T_{vm}(Z))) &= \theta \sum_{i=1}^m \mathbb{E}g(T_{vm}(Z) + i) - \mathbb{E}(T_{vm}(Z)g(T_{vm}(Z))) = \\ &= \theta \sum_{i=1}^v \mathbb{E}g(T_{vm}(Z) + i) - \theta \sum_{j=1}^3 \eta_j^{(vm)}(g) \end{aligned}$$

und dieses Ergebnis werden wir wiederholt verwenden.

### 8.2.1 Abschätzungen des Verhaltens des summierten Komponentenvektors

Nun lassen sich zunächst durch Anwendung der Rekursionsformel Abschätzungen der Punktwahrscheinlichkeiten erhalten, wenn die  $\epsilon_{ij}$  ausreichend klein sind.

**Satz 8.7.** *Es gibt ein  $\epsilon > 0$ , so dass*

$$|\mathbf{Pr}(T_{vm}(Z) = s) - \theta s^{-1} \mathbf{Pr}(s - m \leq T_{vm}(Z) < s - v)| \leq s^{-1} \epsilon$$

*gilt.*

*Beweis.* (Idee) Die genauen Abschätzungen sind kompliziert, aber die Idee ist die folgende: Wenn wir  $g := \mathbb{1}_s$  verwenden, lässt sich  $\eta_1$  aus der Summe der  $\epsilon_{ij}$  erhalten, ebenso sind die Summen in  $\eta_2$  und  $\eta_3$  beschränkt, dafür benötigen wir Bedingungen wie  $\sup_i E_{i0} < \infty$ . Diese sind unter dem angenommenen Verhalten der  $\epsilon_{ij}$  erfüllt.  $\square$

Mit  $g := \mathbb{1}_s - \mathbb{1}_{s+1}$  lässt sich für  $n \geq s \geq n/2$  und  $b \leq n/8$  zeigen, dass

$$|\mathbf{Pr}(T_{bn}(Z) = s) - \mathbf{Pr}(T_{bn}(Z) = s + 1)| = O(n^{-2})$$

gilt. Insbesondere ist also auch  $s \mathbf{Pr}(T_{vm}(Z) = s)$  beschränkt.

Wir können auch die Totalvariation zwischen  $\mathcal{L}(T_{vm}(Z))$  und  $\mathcal{L}(T_{vm}(Z^*))$  betrachten. Dafür können wir die Rekursionsformel auf die Steinfunktion anwenden. Wir erhalten damit

**Satz 8.8.** *Es gilt*

$$d_{TV}(\mathcal{L}(T_{0m}(Z)), \mathcal{L}(T_{0m}(Z^*))) = O(\epsilon_1)$$

mit

$$\epsilon_1 = m^{-\min(1, \theta, g_1, a_1)} \log^{1+\mathbb{1}_{\theta=1}} m (1 + \mathbb{1}_{\theta \geq 1, g_1 > 1} S(m) + \mathbb{1}_{g_1 = \min(1, \theta)} \log m),$$

wobei  $S(n) = \sum_{i=1}^n 1/(ir_i)$  ist.

*Beweis.* (Idee) Für eine Menge  $A \subset \mathbb{Z}^+$  ist  $g_{mA}$  die zugehörige Steinfunktion und der Steinsche Operator, angewendet auf  $T_{0m}(Z)$  ergibt

$$\Pr(T_{0m}(Z) \in A) - \Pr(T_{0m}(Z^*) \in A) = \mathbb{E} S_m g_{mA}(T_{0m}(Z)).$$

Nach der Rekursionsformel gilt  $\mathbb{E}(S_m g_{mA}(T_{0m})) = \sum_{j=1}^3 \eta_j^{(1m)}(g_{mA})$ . Wenn wir die Abschätzung für  $|g_{mA}(\omega)|$  verwenden und die Form der  $\eta_i$  ansehen, heißt das, dass sich das Problem auf Abschätzungen von  $\mathbb{E} \left( 1/(T_{bn}^{(i)} + i) \right)$  zurückführen lässt und dieser Ausdruck lässt sich so abschätzen, dass die asymptotische Darstellung stimmt.  $\square$

Wir haben bereits im vorigen Abschnitt gezeigt, dass die Verteilungsfunktion für  $T_{0m}(Z^*)$  gegen  $P_\theta$  konvergiert. Dieser Zusammenhang lässt sich zusammen mit den Abschätzungen für den Fehler genauer darstellen, indem ein Stein-Operator für  $P_\theta$  verwendet wird. Es gibt also einen Operator  $S$ , der  $\mathbb{E} Sg(Z) = 0$  für jede  $P_\theta$ -verteilte Zufallsvariable  $Z$  erfüllt. Dieser ist ohne Beweis durch

$$Sg(u) = \theta \int_0^1 g(u+t) dt - ug(u)$$

für alle beschränkten Funktionen  $g(u)$  gegeben. Es gilt dann für  $y \geq 0$  und Funktionen der Form  $f(u) = \mathbb{1}_{u \leq y}$  für die dazugehörige Steinfunktion  $g_f$

$$\left| \int_0^1 g_f(u+t) dt - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g_f(u+i/m) \right| \leq \frac{(1+\theta)(2\theta+1)}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{mu+i} + \frac{1}{my}.$$

Nach der Definition von  $T_{0m}(Z^*)$  gilt

$$\mathbb{E}(Sg_f)(m^{-1}T_{0m}(Z^*)) = \theta \mathbb{E} \left( \int_0^1 g_f(m^{-1}T_{0m}(Z^*) + t) dt - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g_f(m^{-1}(T_{0m}(Z^*) + i)) \right),$$

damit ist die vorige Abschätzung sinnvoll.

**Definition 34.** Die Kolmogorov- Distanz zwischen zwei auf  $\mathbb{R}$  definierten Wahrscheinlichkeitsmaßen  $\mu, \nu$  ist durch

$$d_K(\mu, \nu) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (|\mu(-\infty, x] - \nu(-\infty, x]|)$$

gegeben.

Die Kolmogorov- Distanz ist also eine Metrik, die sich durch das Maximum von Erwartungswerten von Funktionen der Form  $f(u) = \mathbb{1}_{u \leq y}$  abschätzen lässt. Die vorherigen Abschätzungen zielen genau auf solche Funktionen ab. Damit reichen sie zwar nicht aus, um den Totalvariationsabstand zwischen  $m^{-1}T_{0m}(Z^*)$  und  $P_\theta$  abzuschätzen, sind aber für die Kolmogorov-Distanz hinreichend. Damit lässt sich mit Hilfe der Rekursion für Poisson-verteilte Zufallsvariablen auch die Konvergenz von  $m^{-1}T_{0m}$  gegen  $p_\theta$  zeigen.

**Satz 8.9.** *Es gilt*

$$d_K(\mathcal{L}(m^{-1}T_{0m}(Z^*)), P_\theta) \leq O(m^{-\min(1, \theta)})$$

und für  $v \geq 1$

$$d_K(\mathcal{L}(m^{-1}T_{vm}(Z^*), P_\theta) = O\left(\left(\frac{v+1}{m+1}\right)^{\min(1, \theta)} (1 + \mathbb{1}_{\phi=1} \log m)\right).$$

*Beweis.* (Idee) Es ist möglich,  $\mathbb{E}(1/(T_{0m}(Z^*) + i))$  abzuschätzen und damit folgt die Behauptung daraus zusammen mit der Abschätzung der Steinfunktion für  $P_\theta$  für Indikatorfunktionen der Form  $g(u) = \mathbb{1}_{u \leq y}$ .  $\square$

**Satz 8.10.** *Es gilt*

$$d_K(\mathcal{L}(m^{-1}(T_{0m}(Z^*)), \mathcal{L}(m^{-1}(T_{vm}(Z)))) = O(\epsilon_1 / \log m + (v/m)^{\min(1, \theta)} \log m).$$

*Beweis.* (Idee) Das lässt sich wieder mit der Steinschen Methode für die zusammengesetzte Poisson-Verteilung zeigen. Für  $f(\omega) := \mathbb{1}(\omega < x)$  gilt  $g_{mx}(x) \leq x^{-1}(1 + \theta h(m+1))$  und daraus lässt sich die Aussage durch Abschätzen von  $\mathbb{E}(1/(T_{0m}(Z) + i))$  zeigen.  $\square$

Aus den beiden vorigen Sätzen können wir einen Vergleich der Dichte von  $T_{vm}$  zu  $p_\theta$  erhalten

**Satz 8.11.** *Es gilt*

$$m\mathbf{Pr}(T_{vm}(Z^*) = s) - p_\theta(s/m) \leq O\left(m s^{-1} v^{-1} \left(\frac{v+1}{m+1}\right)^{\min(1, \theta)} (1 + \mathbb{1}_{\theta=1} \log m)\right).$$

*Beweis.* (Idee) Mit der Rekursion erhalten wir  $s\theta^{-1}\mathbf{Pr}(T_{vm}(Z^*) = s) = \mathbf{Pr}(s - m \leq T_{vm}(Z^*) < s - v)$ . Weiters gilt nach der Kolmogorov-Distanz

$$\begin{aligned} & \mathbf{Pr}(s - m \leq T_{vm}(Z^*) < s - v) - P_\theta[s/m - 1, s/m] \leq \\ & \leq \theta m s^{-1} O\left(\left(\frac{v+1}{m+1}\right)^{\inf(1, \theta)} (1 + \mathbb{1}_{\theta=1} \log m)\right) \end{aligned}$$

und zusammen mit  $x p_\theta(x) = \theta P_\theta[x - 1, x]$  ergibt sich die Behauptung. Es lässt sich auch  $m\mathbf{Pr}(T_{vm}(Z) = s) - p_\theta(s/m)$  durch den Abstand von  $\mathbf{Pr}(T_{vm}(Z) = s)$  zu  $\mathbf{Pr}(T_{vm}(Z^*) = s)$  zusammen mit dem Abstand zwischen  $m\mathbf{Pr}(T_{vm}(Z^*) = s)$  und  $p_\theta(s/m)$  abschätzen.  $\square$

Nachdem wir ja das Verhalten von Poisson-verteilten Zufallsvariablen als Muster nehmen wollen, sollte das Verhältnis zwischen  $T_{vm}(Z)$  und  $T_{vm}(Z^*)$  möglichst nahe an 1 sein.

**Satz 8.12.** *Es gilt für beliebiges  $\epsilon > 0$*

$$\max\left(\left|\frac{\mathbf{Pr}(T_{vm}(Z) = s)}{\mathbf{Pr}(T_{vm}(Z^*) = s)} - 1\right|, \left|\frac{\mathbf{Pr}(T_{vm}(Z^*) = s)}{\mathbf{Pr}(T_{vm}(Z) = s)} - 1\right|\right) \leq O(m^{-1+\epsilon})$$

für  $v \leq m/6$  und  $m/2 \leq s \leq m$ .

*Beweis.* (Idee) Eine untere Schranke für  $s\theta^{-1}\mathbf{Pr}(T_{vm}(Z^*) = s)$  folgt direkt aus der Rekursionsformel für  $T_{vm}(Z^*)$  und den Punktwahrscheinlichkeiten von  $\mathbf{Pr}(T_{vm}(Z^*) = 0)$ . Die Behauptung ergibt sich dann daraus zusammen mit der Abschätzung für

$$s\theta^{-1}(\mathbf{Pr}(T_{vm}(Z) = s) - \mathbf{Pr}(T_{vm}(Z^*) = s)).$$

$\square$

## 8.2.2 Einige Ergebnisse

Aus dem Verhalten des Komponentenvektors lassen sich Resultate für die Verteilung der größten und kleinsten Komponenten erhalten, und zwar, dass dieses dem Verhalten der größten und kleinsten Komponenten von  $Z^*$  entspricht, etwas genauer als im vorigen Abschnitt gezeigt wurde. Insbesondere sind die kleinsten Komponenten in etwa unabhängig und die Verteilung der größten Komponenten konvergiert gegen die Poisson-Dirichlet-Verteilung. Des weiteren sind ist die Anzahl der Komponenten asymptotisch normalverteilt. Nachdem die genauen Beweise aufwändige Abschätzungen benötigen, werden wir hier meistens nur der Ansatz zeigen. Wir bezeichnen im Folgenden für einen Vektor  $X = (x_1, x_2, \dots)$  den Vektor der Indizes, die sich in diesem Intervall befinden mit  $X[a, b] := (x_a, x_{a+1}, \dots, x_b)$ . Wenn wir einen aus den  $Z_{ij}$  erzeugten Vektor betrachten, schreiben wir diesen in der Form  $\tilde{C}[a, b] := (C_{a,1}, C_{a,2}, \dots, C_{b,r_b})$ .

**Satz 8.13.** *Es gilt*

$$d_{TV}(\mathcal{L}(C[1, b]), \mathcal{L}(Z[1, b])) \leq d_{TV}(\mathcal{L}(\tilde{C}[1, b]), \mathcal{L}(\tilde{Z}[1, b])) \leq O(b/n)$$

für  $b < n/8$  und ausreichend großes  $n$ .

*Beweis.* Die erste Ungleichung ist klar. Nachdem der Totalvariationsabstand der Vektoren der der summierten Komponentengrößen ist, gilt, wenn wir  $T_{bn} = T_{bn}(Z)$  schreiben,

$$\begin{aligned} d_{TV}(\mathcal{L}(\tilde{C}[1, b]), \mathcal{L}(\tilde{Z}[1, b])) &= \max_{AC\mathbb{Z}_+} \sum_{r \in A} \mathbf{Pr}(T_{0b} = r) \left( 1 - \frac{\mathbf{Pr}(T_{bn} = n - r)}{\mathbf{Pr}(T_{0n} = n)} \right) \\ &\leq \sum_{r > n/2} \mathbf{Pr}(T_{0b} = r) + \sum_{r=0}^{n/2} \frac{\mathbf{Pr}(T_{0b} = r)}{\mathbf{Pr}(T_{0n} = n)} \\ &\quad \times \left( \sum_{s=0}^n \mathbf{Pr}(T_{bn} = s) (\mathbf{Pr}(T_{bn} = n - s) - (\mathbf{Pr}(T_{bn} = n - r))) \right)_+ \end{aligned}$$

Es gilt zunächst

$$\sum_{r \geq n/2} \mathbf{Pr}(T_{0b} = r) \leq \frac{2}{n} \mathbb{E}(T_{0b}) \leq O(b/n).$$

Die zweite Summe lässt sich an  $s = n/2$  aufteilen, die erste Summe davon ist

$$\sum_{r=0}^{n/2} \mathbf{Pr}(T_{0b} = r) \times \sum_{s=0}^{n/2} \mathbf{Pr}(T_{0b} = s) \frac{\mathbf{Pr}(T_{bn} = n - s) - \mathbf{Pr}(T_{bn} = n - r)}{\mathbf{Pr}(T_{0n} = n)}$$

und wegen  $\mathbf{Pr}(T_{bn} = n - s) - \mathbf{Pr}(T_{bn} = n - s - 1) \leq O(n^{-2})$  gibt es eine Konstante  $c$  mit

$$\leq c \sum |s - r| n^{-1} \mathbf{Pr}(T_{0b} = s) \leq c \mathbb{E}(T_{0b})/n,$$

also ist diese ebenfalls durch  $O(b/n)$  abschätzbar.

Zuletzt ist die Summe über  $s > n/2$ , indem wir den Summanden  $\mathbf{Pr}(T_{bn} = n - r)$  vernachlässigen, kleiner oder gleich

$$\sum_{r=0}^{n/2} \mathbf{Pr}(T_{0b} = r) \sum_{s=n/2+1}^n \mathbf{Pr}(T_{0b} = s) \mathbf{Pr}(T_{bn} = n - s) / \mathbf{Pr}(T_{0n} = n)$$



und das ist durch  $\max_{s > n/2} (\mathbf{Pr}(T_{0b} = s)) / \mathbf{Pr}(T_{0n} = n)$  beschränkt. Nachdem sich  $s \mathbf{Pr}(T_{0b} = s) = O(b/s)$  für ausreichend großes  $s$  zeigen lässt und  $n \mathbf{Pr}(T_{0n} = n)$  nach unten beschränkt ist, ergibt sich die Behauptung.  $\square$

Wir können den Abstand zwischen den großen Komponenten einer beliebigen Struktur und den großen Komponenten einer Struktur mit  $\theta/i$ -poisson-verteiltern Komponenten abschätzen:

**Satz 8.14.** *Es gilt*

$$d_{TV}(\mathcal{L}(C[b+1, n]), \mathcal{L}(C^*[b+1, n])) \leq O((\min(b, n/\log n))^{-(\min(1, \theta, g_1, a_1) + \delta)})$$

für beliebiges  $\delta > 0$  und  $3\theta \leq b < n/4$ .

*Beweis.* (Idee) Es sei  $R = \sum_{i=b+1}^n r_i$  und  $y \in \{0, 1\}^R$  ein Komponentenvektor von Komponenten aus  $Z_{ij}$  von der Form  $y = (y_{b+1,1}, \dots, y_{b+1,r_{b+1}}, y_{b+2,1}, \dots, y_{n,r_n})$  und wir schreiben  $\sum_{i,r} i y_{i,r} = n - l$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{Pr}(Z[b+1, n] = y)}{\mathbf{Pr}(Z^*[b+1, n] = y)} &= \prod_{i=b+1}^n \prod_{r=1}^{r_i} \left( \frac{1 - \theta/ir_i(1 + E_{i0})}{(1 - \theta/ir_i(1 - E_{i0}(Z^*)))} \right)^{1-y_{ir}} \left( \frac{1 + \epsilon_{i1}}{1 + \epsilon_{i1}(Z^*)} \right)^{y_{ir}} \\ &\geq 1 - \sum_{i=b+1}^n \frac{\theta r_i (E_{i0} + \theta/2ir_i)}{ir_i - \theta(1 + \theta/2ir_i)} - \sum_{i=b+1}^n \sum_{r=1}^{r_i} \frac{y_{ir} \epsilon_{i1}}{1 - \theta/ir_i}. \end{aligned}$$

Wegen der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt

$$\frac{\mathbf{Pr}(C[b+1, n] = y)}{\mathbf{Pr}(C^*[b+1, n] = y)} = \frac{\mathbf{Pr}(Z[b+1, n] = y) \mathbf{Pr}(T_{0b}(Z) = l) \mathbf{Pr}(T_{0n}(Z^*) = n)}{\mathbf{Pr}(Z^*[b+1, n] = y) \mathbf{Pr}(T_{0b}(Z^*) = l) \mathbf{Pr}(T_{0n}(Z) = n)}.$$

Wir führen

$$D(l) := \left( 1 - \frac{\mathbf{Pr}(T_{0b}(Z) = l)}{\mathbf{Pr}(T_{0b}(Z^*) = l)} \right)_+$$

ein und schreiben  $B(n) := \max(|\frac{\mathbf{Pr}(T_{0n}(Z)=n)}{\mathbf{Pr}(T_{0n}(Z^*)=n)} - 1|, |\frac{\mathbf{Pr}(T_{0n}(Z^*)=n)}{\mathbf{Pr}(T_{0n}(Z)=n)} - 1|)$ . Damit erhalten wir aus dem Vorigen

$$\frac{\mathbf{Pr}(C[b+1, n] = y)}{\mathbf{Pr}(C^*[b+1, n] = y)} \geq 1 - \frac{18\theta}{11} \sum_{i=b+1}^n i^{-1} (|E_{i0}| + \theta/2ir_i) - 3/2 \sum_{i=b+1}^n \sum_{r=1}^{r_i} y_{ir} |\epsilon_{i1}| - B(n) - D(l).$$

Ist nun  $A \subset \mathbb{Z}_+^R$ , dann ist  $\mathbf{Pr}(C^*([b+1, n]) \in (A \setminus \{0, 1\}^R))$  wegen der Einschränkungen für  $\mathbf{Pr}(Z_{ij} > 1)$  klein. Wir erhalten die Wahrscheinlichkeit für  $Pr(C[b+1, n] \in A)$  durch

$$\begin{aligned} \mathbf{Pr}(C[b+1, n] \in A) &\geq Pr(C^*[b+1, n] \in A) - \mathbf{Pr}(C^*[b+1, n] \in A \setminus \{0, 1\}^R) \\ &\quad - \frac{18\theta}{11} \sum_{i=b+1}^n i^{-1} (|E_{i0}| + \theta/(2ir_i)) - \frac{3}{2} \sum_{i=b+1}^n \sum_{j=1}^{r_i} |\epsilon_{i,1}| Pr(C_{i,1}^* = 1) \\ &\quad - \sum_{l=0}^n Pr(T_{0b}(C^*) = l) D(l) - B(n) \end{aligned}$$

und die einzelnen Summen lassen sich abschätzen und haben die gesuchte Asymptotik.  $\square$

**Satz 8.15.** *Es gilt für einen Vektor der Komponentengrößen  $y$  mit Gesamtlänge  $b \leq cn$  für eine ausreichend kleine Konstante  $c$*

$$\left| \frac{\Pr(C[1, b] = y)}{\Pr(Z[1, b] = y)} - 1 \right| \leq O(n^{-1}(b + T_{0b}(y))).$$

*Beweis.* (Idee) Durch Verwenden der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$1 - \frac{\Pr(C[1, b] = y)}{\Pr(Z[1, b] = y)} = 1 - \frac{\Pr(T_{bn} = n - T_{0b}(y))}{\Pr(T_{0n} = n)}$$

und Abschätzen der sich ergebenden Summe.  $\square$

Zuletzt können wir noch die Verteilung der größten Komponenten beschreiben:

**Satz 8.16.** *Es sei  $(L_1(n), \dots, L_r(n))$  mit  $L_1^{(r)} \geq L_2^{(n)} \geq \dots$  der Vektor der größten Komponenten und es seien  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_i = nx_i$  mit  $1 > x_1 > x_2 > \dots > x_r > 0$ . Dann gilt für beliebiges  $\delta > 0$*

$$\left| \frac{n^r \Pr(L_1^{(n)} = m_1, \dots, L_r^{(n)} = m_r)}{f_\phi^{(r)}(x_1, \dots, x_r)} - 1 \right| < O(n^{-\min(g_1, 1, \theta) + \delta}).$$

*Beweis.* (Idee) Wir erstellen wieder einen Komponentenvektor mit  $y_i = 1$  für  $i = m_j$  und  $y_i = 0$  sonst und wollen

$$\left| \frac{n^r \Pr(C_{m_r} \geq 1, C[m_r + 1, n] = y)}{f_\theta(x_1, \dots, x_r)} - 1 \right| \leq O(n^{-\min(g_1, 1, \theta) + \delta})$$

zeigen. Zunächst schreiben wir den Komponentenvektor  $C^{(n)}$  mit der bedingten Wahrscheinlichkeit und  $M_r = \sum_{l=1}^r m_l$  wieder als

$$\begin{aligned} & \frac{\Pr(C_{m_r} = 1, C[m_r + 1, n] = y)}{\Pr(C_{m_r}^* = 1, C^*[m_r + 1, n] = y)} = \\ &= \frac{\Pr(Z_{m_r} = 1, Z[m_r + 1, n] = y) \Pr(T_{0n}(Z^*) = n) \Pr(T_{0m_r-1}(Z) = n - M_r)}{\Pr(Z_{m_r}^* = 1, Z^*[m_r + 1, n] = y) \Pr(T_{0n}(Z) = n) \Pr(T_{0, m_r-1}(Z^*) = n - M_r)}. \end{aligned}$$

Wir können dann die Faktoren durch

$$\frac{\Pr(T_{0n}(Z^*) = n)}{\Pr(T_{0n}(Z) = n)} - 1 \leq O(n^{-1+\epsilon}), \quad \frac{\Pr(Z_{m_r} = 1, Z[m_r + 1, n] = y)}{\Pr(Z_{m_r}^* = 1, Z^*[m_r + 1, n] = y)} - 1 \leq O(n^{-1})$$

abschätzen. Die erste Gleichung ist bereits gezeigt und den Bruch der zweiten Gleichung können wir analog zu dem vorigen Satz 8.14 aus den Produkten der Punktwahrscheinlichkeit erhalten und wie dort nach unten abschätzen beziehungsweise mit Hilfe der Exponentialfunktion nach oben abschätzen. Es lässt sich auch

$$\frac{\Pr(T_{0, m_r-1}(Z) = n - M_r)}{\Pr(T_{0, m_r-1}(Z^*) = n - M_r)} - 1 = O(n^{-\min(g_1, \theta, 1) + \delta})$$

aus der Nähe von  $T_{0m_r}(Z^*)$  zu  $P_\theta$  und dem Fehler zwischen  $\Pr(T_{0m_r}(Z^*) = n - M_r)$  und  $\Pr(T_{0m_r}(Z) = n - M_r)$  zeigen. Als nächstes ist

$$\frac{\Pr(C_{m_r} \geq 1, C[m_r + 1, n] = y)}{\Pr(C_{m_r} = 1, C[m_r + 1, n] = y)} - 1$$

vernachlässigbar, weil  $\Pr(C_{m_r} > 1, C(m_r + 1, n))$  klein ist. Damit gilt insgesamt

$$\left| \frac{\Pr(C_{m_r} \geq 1, C[m_r + 1, n] = y)}{\Pr(C_{m_r}^* = 1, C^*[m_r + 1, n] = y)} - 1 \right| \leq O(n^{-\min(g_1, 1, \theta) + \delta}).$$

Es fehlt also noch eine Abschätzung für

$$\frac{n^r \Pr(C_{m_r}^* = 1, C^*[m_r + 1, n] = y)}{f_\theta^{(r)}(x_1 \dots x_r)} - 1,$$

diese lässt sich folgendermaßen direkt aus der Poisson-Verteilung zeigen. Es gilt wegen der Rekursion für Poisson-verteilte Zufallsvariablen  $n\Pr(T_{0n}(Z^*) = n) = \Pr(T_{0n}(Z^*) < n)$  und  $(n - M_r)\Pr(T_{0, m_r - 1}(Z^*) = n - M_r) = \Pr(n - M_r - m_r + 1 \leq T_{0, m_r - 1}(Z^*) < n - M_r)$ . Zusammen mit der bedingten Wahrscheinlichkeit und der Wahrscheinlichkeit für  $\Pr(Z^*[m_r + 1, n] = y)$  folgt daraus

$$\begin{aligned} \Pr(C_{m_r}^* = 1, C^*[m_r + 1, n] = y) &= \exp\left(-\theta \sum_{i=m_r}^n i^{-1}\right) \left(\prod_{l=1}^r \frac{\theta}{m_l}\right) \frac{n}{n - M_r} \\ &\times \frac{\Pr(n - M_r - m_r + 1 \leq T_{0, m_r - 1}(Z^*) < n - M_r)}{\Pr(T_{0n}(Z^*) < n)}. \end{aligned}$$

Wir schreiben  $X_r := \sum_{l=1}^r x_l = M_r/n$ ,  $Z_r := \frac{1 - X_r}{x_r}$ . Es gilt auch

$$f_\phi^{(r)} = \frac{e^{\gamma\theta} \theta^r \Gamma(\theta) x_r^{\theta-1}}{x x_1 \dots x_r} p_\theta\left(\frac{1 - x_1 - \dots - x_r}{x_r}\right) \text{ gilt und wir können } Z_r p_\theta(Z_r) = P_\theta[Z_r - 1, Z_r] \text{ schreiben.}$$

Wir verwenden  $P_\theta[0, 1] = e^{-\gamma\theta} / \Gamma(\theta + 1)$  und erhalten daraus

$$f_\theta^{(r)}(x_1, \dots, x_r) = \left( \theta^r \prod_{l=1}^r \frac{1}{x_r^l} \left( \frac{x_r^\theta}{1 - X_r} \right) \frac{P_\theta[Z_r - 1, Z_r]}{P_\theta[0, 1]} \right).$$

Der Fehler zwischen diesen Ausdrücken ist dann nahe an 1, weil die Dichte von  $n^{-1}T_{0n}(Z^*)$  gegen  $p_\theta$  konvergiert und  $P_\theta$  stetig ist. Die Behauptung folgt dann aus der Summe dieser Abschätzungen.  $\square$

Es lässt sich auch die Verteilung der Anzahl der Komponenten bestimmen. Diese verhält sich ähnlich einer Poisson-Verteilung, es gilt

$$d_{TV}(\mathcal{L}(K_{0n}(C^{(n)}), Po(\theta \log n)) = O((\log n)^{-1/2}).$$

Einerseits lässt sich, unter anderem mit Hilfe der Steinschen Methode für die Poisson-Verteilung zeigen, dass die Anzahl der Komponenten von  $C^*$  unter der Voraussetzung von  $T_{bn}(Z^*) = k$  annähernd Poisson-verteilt sind. Das lässt sich verwenden, um auch zu zeigen, dass die Verteilung von  $K_{0n}(C^{(n)})$  ähnlich der Verteilung der Faltung von  $K_{0b}(Z)$  mit einer bestimmten Poisson-Verteilung ist. Diese ist wiederum selbst annähernd Poisson-verteilt.

Weiters lässt sich auch zeigen, dass es eine Brownsche Bewegung gibt, die die Verteilung approximiert.

**Definition 35.** Eine Brownsche Bewegung ist ein stochastischer Prozess  $W_t, t \geq 0$ , so dass  $W_0$  fast sicher 0 ist und die Zuwächse  $W_{t+s} - W_s$  unabhängig und normalverteilt mit den Parametern  $\mu t$  und  $\sigma^2 t$  sind.

**Satz 8.17.** Für

$$B_n := \frac{\sum_{i=1}^{n^t} C_i^{(n)} - \theta \log n}{\sqrt{\theta \log n}}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

gibt es eine Brownsche Bewegung  $B$ , so dass

$$\mathbb{E} \left( \min \left( \sup_t |B_n(t) - B(t)|, 1 \right) \right) = O \left( \frac{\log \log n}{\log n} \right)$$

gilt.

**Beispiel 14.** Wenn wir die Abbildungen von  $(1, \dots, n) \rightarrow (1, \dots, n)$  betrachten, dann ist das die Menge der Zyklen von markierten Wurzelbäumen, daher sind die  $Z_i$  Poissonverteilt und es lässt sich zeigen, dass die Anforderungen erfüllt sind.

**Beispiel 15.** Polynome über einem endlichen Körper sind eine Multimenge von irreduziblen Polynomen und damit haben die  $Z_i$  die Verteilung  $Z_i \sim NB(N_q(i), q^{-1})$ , wobei  $N_q(i)$  die Anzahl der irreduziblen Polynome des Grades  $i$  sind. Nachdem die negative Binomialverteilung unendlich teilbar ist und weil  $N_q(i) \sim q^i/i$  gilt, sind auch die Voraussetzungen dieses Abschnitts anwendbar.

### 8.3 Konvergente Strukturen

Die Ausführungen dieses Abschnitts stammen von Barbour und Granovsky [3].

**Definition 36.** Wir sagen, dass eine Funktion  $f$  im Unendlichen wenig variiert, wenn für jedes  $a > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(ax)}{f(x)} \rightarrow 1$$

gilt.[13]

Wir nehmen an, dass die Bedingung der bedingten Wahrscheinlichkeit erfüllt ist und nehmen der Einfachheit halber an, dass für die Erwartungswerte der unabhängigen Zufallsvariablen  $Z_j$

$$\mathbb{E}(Z_j) = j^\alpha \lambda(j)$$

gilt, so dass  $\lambda(x)$  im Unendlichen wenig variiert und  $\alpha < -1$  ist. Nachdem die Summe der  $\Pr(Z_i > 0) \leq \mathbb{E}(Z_i)$  konvergent ist, gilt zunächst nach dem Lemma von Borel-Cantelli  $T_{0\infty} := \sum_{i=1}^{\infty} i Z_i < \infty$  fast sicher.

Die Idee ist wieder, das Verhalten der  $Z_j$  auf das Verhalten von unabhängigen Poissonverteilten Zufallsvariablen zurückzuführen. Wir nehmen wie bei den logarithmischen Strukturen an, dass es  $r(j) \geq 1$  gibt, so dass

$$Z_j = \sum_{k=1}^{r(j)} Z_{jk}$$

mit für jedes  $j$  unabhängigen und identisch verteilten  $Z_{jk}$  gilt. Dann definieren wir  $\epsilon_{js}$  durch

$$r_j \Pr(Z_{j1} = 1) = j^\alpha \lambda(j) (1 - \epsilon_{j1})$$

und für  $s \geq 2$

$$r_j \mathbf{Pr}(Z_{j1} = s) = j^\alpha \lambda(j) (\epsilon_{js}).$$

Die  $\epsilon_{js}$  müssen ausreichend klein sein, daher fordern wir dass es eine Folge von Konstanten  $\gamma_s$  gibt mit  $\epsilon_{js} \leq \epsilon(j) \gamma_s$  und  $\lim_{j \rightarrow \infty} \epsilon(j) = 0$ . Des weiteren setzen wir für  $q := -\alpha - 1$

$$\sum_{s \geq 2} \sup_{l \geq s} (\lambda(l/s) / \lambda(l)) s^{1+q} \gamma_s < \infty$$

und

$$p_0 := \min_j \mathbf{Pr}(Z_{j1} = 0) > 0$$

voraus. Um eine Rekursion einer ähnlichen Form wie für Poisson-verteilte Zufallsvariablen zu erhalten, gehen wir ähnlich wie bei den logarithmischen Strukturen vor und betrachten wieder

$$T_{bn}^{(j)} := T_{bn} - j Z_{j1}.$$

Es sind wieder  $T_{bn}^{(j)}$  und  $Z_{j1}$  unabhängig und es gilt für jede beschränkte Funktion  $g$

$$\mathbb{E}(Z_{j1} g(T_{bn})) = \sum_{s=1}^{\infty} s \mathbf{Pr}(Z_{j1} = s) \mathbb{E}(g(T_{bn}^{(j)} + js))$$

Damit und weil die  $Z_{ji}$  für festes  $j$  für alle  $i$  identisch verteilt sind, können wir  $\mathbb{E}(T_{bn} g(T_{bn}))$  in der Form

$$\mathbb{E}(T_{bn} g(T_{bn})) = \sum_{j=b+1}^n j r_j \sum_{s=1}^{\infty} s \mathbf{Pr}(Z_{j1} = s) \mathbb{E}(g(T_{bn}^{(j)} + js))$$

schreiben. Für  $g := \mathbb{1}_l$  haben wir wegen den Punktwahrscheinlichkeiten von  $Z_{j1}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_{bn} \mathbb{1}_l(T_{bn})) &= l \mathbf{Pr}(T_{bn} = l) = \sum_{j=b+1}^{\min(n,l)} j^{-q} \lambda(j) \mathbf{Pr}(T_{bn} = l - j) + \\ &+ \sum_{j=b+1}^{\min(n,l)} j^{-q} \lambda(j) ((1 - \epsilon_{j1}) \mathbf{Pr}(T_{bn}^{(j)} = l - j) - \mathbf{Pr}(T_{bn} = l - j)) + \\ &+ \sum_{j=b+1}^{\min(n,l/2)} \sum_{s=2}^{\infty} j^{-q} \lambda(j) s \epsilon_{js} \mathbf{Pr}(T_{bn}^{(j)} = l - js). \end{aligned}$$

Wir kommen nun zu den eigentlichen Beweisen und beginnen mit einem Hilfsergebnis:

**Satz 8.18.** *Unter den bisherigen Bedingungen gibt es eine Konstante  $K > 0$ , so dass gilt*

$$\mathbf{Pr}(T_{bn} = l) \leq K \lambda(l) l^{-1-q}$$

*Beweis.* Der Beweis verwendet die Formel von vorher und Induktion über  $l$ . Für  $l \leq b$  ist  $\mathbf{Pr}(T_{bn} = l) = 0$ , daher ist für diese Werte nichts mehr zu zeigen.

Für  $l > b$  nehmen wir an, dass die Ungleichung für alle  $s < l$  bereits gezeigt ist. Zunächst können wir  $T_{bn}^{(j)}$  mit

$$\mathbf{Pr}(T_{bn} = s) \geq \mathbf{Pr}(Z_{j1} = 0) \mathbf{Pr}(T_{bn}^{(j)} = s) = p_0 \mathbf{Pr}(T_{bn}^{(j)} = s)$$

durch  $T_{bn}$  abschätzen.

Betrachten wir nun die ersten beiden Zeilen der Rekursionsformel zusammen und verwenden die Abschätzung für  $T_{bn}^{(j)}$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \sum_{j=b+1}^{\min(n,l)} j^{-q} \lambda(j) (1 - \epsilon_{j1}) \mathbf{Pr}(T_{bn}^{(j)} = l - j) \\ & \leq \sum_{j=1}^{l/2} j^{-q} \lambda(j) p_0^{-1} \mathbf{Pr}(T_{bn} = l - j) + \sum_{j=l/2+1}^{\min(n,l)} j^{-q} \lambda(j) p_0^{-1} \mathbf{Pr}(T_{bn} = l - j) \\ & \leq p_0^{-1} K L \lambda(l) \left(\frac{2}{l}\right)^{1+q} \sum_{j=1}^{l/2} j^{-q} + p_0^{-1} L \lambda(l) (2/l)^q, \end{aligned}$$

wobei  $L := \sup_{l \geq 2} \max_{l/2 < t \leq l} \lambda(l-t)/\lambda(l) < \infty$  ist. Die Summe der dritten Zeile lässt sich in der Form  $l^{-q} o(1)$  abschätzen. Insgesamt ergibt sich

$$l \mathbf{Pr}(T_{bn} = l) \leq \lambda(l) l^{-q} (2^q L p_0^{-1} + o(1) + K(o(1)))$$

und für ausreichend großes  $K$  lässt sich die Behauptung zeigen. □

**Satz 8.19.** *Es seien die bisher genannten Bedingungen erfüllt und es sei*

$$H_n(l) := \max_{0 \leq b \leq l-1} |\lambda^{-1}(l) l^{-\alpha} \mathbf{Pr}(T_{b,n} = l) - 1|$$

für  $1 \leq l \leq n$ . Dann gilt für  $H(l) := \sup_{n \geq l} H_n(l)$  die Asymptotik  $\lim_{l \rightarrow \infty} H(l) = 0$ .

*Beweis.* Die Rekursionsformel lässt sich bis auf die erste Zeile in der Form  $l^{-q} o(1)$  abschätzen. Damit ergibt sich

$$l \mathbf{Pr}(T_{bn} = l) = \sum_{j=b+1}^l j^{-q} \mathbf{Pr}(T_{bn} = l - j) + \lambda(l) l^{-q} o(1).$$

Multiplikation mit  $\lambda(l)^{-1} l^q$  und Einschieben von  $\mathbf{Pr}(T_{bn} \leq l - b - 1)$  ergibt

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}(l) l^{1+q} \mathbf{Pr}(T_{bn} = l) &= \mathbf{Pr}(T_{bn} \leq l - b - 1) \\ &+ \sum_{s=0}^{l-b-1} \left( \frac{l^q \lambda(l-s)}{(l-s)^q \lambda(l)} - 1 \right) \mathbf{Pr}(T_{bn} = s) + o(1) \end{aligned}$$

und wir wollen die zweite Summe abschätzen. Wir betrachten eine Folge  $s_l \rightarrow \infty$  mit  $s_l = o(l)$  und teilen die Summe an  $s_l$  und  $l/2$  auf. Es gilt

$$\max_{s \leq s_l} \left| \frac{\lambda(l-s)}{\lambda(l)} - 1 \right| = o(1)$$

und damit gilt auch (wegen  $\frac{l^q \lambda(l-s)}{(l-s)^q \lambda(l)} - \frac{l^q}{(l-s)^q} + \frac{l^q}{(l-s)^q} - 1 = o(1)$ )

$$\sum_{s=0}^{s_l} \left| \frac{l^q \lambda(l-s)}{(l-s)^q \lambda(l)} - 1 \right| \mathbf{Pr}(T_{bn} = s) = o(1).$$

Aus  $T_{0\infty} < \infty$  fast sicher und damit auch  $\Pr(T_{bn} > s_l) \leq \Pr(T_{0\infty} > s_l) \rightarrow 0$  erhalten wir

$$\sum_{s=s_l+1}^{l/2} \left| \frac{l^q \lambda(l-s)}{(l-s)^q \lambda(l)} - 1 \right| \Pr(T_{bn} = s) \leq (2^q L + 1) \Pr(T_{b\infty} > s_l) = o(1).$$

Wir können auch die letzte Summe durch

$$\sum_{s=l/2}^{l-b-1} \left( \frac{l^q \lambda(l-s)}{(l-s)^q \lambda(l)} - 1 \right) \Pr(T_{bn} = s) \leq K \left( \frac{2}{l} \right) \left( \frac{l}{2} + \sum_{s=1}^{l/2} \frac{l^q \lambda(s)}{\lambda(l) s^q} \right) = o(1)$$

abschätzen und wir erhalten insgesamt

$$\lambda^{-1}(l) l^{1+q} \Pr(T_{bn} = l) \sim 1 - \Pr(T_{bn} > l - b - 1).$$

Wegen  $\Pr(T_{bn} > l - b - 1) \rightarrow 0$  ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

**Satz 8.20.** *Es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{TV}(\mathcal{L}(C^{(n)}), Q_n) \rightarrow 0$$

wobei  $Q_n$  die Verteilung des Zufallsvektors  $(Z_1, \dots, Z_n) + e(n - T_{0n}(Z))$  ist, hier ist  $e(j)$  der  $j$ -the Einheitsvektor.

*Beweis.* Es gilt

$$d_{TV}(\mathcal{L}(C_1^{(n)}, \dots, C_b^{(n)}), \mathcal{L}(Z_1, \dots, Z_b)) = \sum_{j=0}^n \left( \Pr(T_{0b} = j) \left( 1 - \frac{\Pr(T_{bn} = n-j)}{\Pr(T_{0n} = n)} \right) \right)_+,$$

also die positiven Summanden der Summe. Wir betrachten eine Folge  $n - b(n) \rightarrow \infty$  mit  $b(n) \rightarrow \infty$  und definieren für eine Folge  $j_n \leq n - b(n) - 1$  eine Funktion

$$g_n(j) = \begin{cases} \left| \frac{n^{1+q} \lambda(n-j)}{(n-j)^{1+q} \lambda(n)} - 1 \right| + 2^{1+q} L_2 (H(n) + H(n-j)) & \text{für } j \leq j_n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für  $j_n \leq n/2$  gilt auch für alle  $j \leq j_n$

$$\left| 1 - \frac{\Pr(T_{bn} = n-j)}{\Pr(T_{0n} = n)} \right| \leq g_n(j)$$

wegen

$$\begin{aligned} & \frac{\Pr(T_{bn} = n-j)}{\Pr(T_{0n} = n)} - \frac{\lambda(n-j)(n-j)^{-1-q}}{\lambda(n)n^{-1-q}} \\ & \leq \frac{H(n-j)(n-j)^{-1-q} \lambda(n-j)}{\Pr(T_{0n} = n)} + \frac{H(n) \lambda(n-j)(n-j)^{-q-1}}{\Pr(T_{0n} = n)} \leq 2^{1+q} L_2 (H(n) + H(n-j)). \end{aligned}$$

Damit lässt sich die Summe durch

$$\Pr(T_{0b} > j_n) + \mathbb{E} g_n(T_{0b})$$

abschätzen. Für  $j_n \rightarrow \infty$  ist wegen der Beschränktheit von  $T_{0\infty}$

$$\Pr(T_{0b(n)} > j_n) \leq \Pr(T_{0\infty} > j_n) \rightarrow 0$$

und  $H(n)$  und  $H(n-j)$  konvergieren für festes  $j$  gegen 0 und damit gilt für festgehaltenes  $j$  auch  $g_n(j) \rightarrow 0$ . Aus dem selben Grund gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g_n(T_{0b(n)})) = 0.$$

Für passende Folgen  $b(n)$  und  $j_n$  mit  $b(n) > n/2$ , beispielsweise  $b(n) = 3/4n$  und  $j_n = 1/4n$  haben wir also

$$d_{TV}(\mathcal{L}(C_1^{(n)}, \dots, C_{b(n)}^{(n)}), \mathcal{L}(Z_1, \dots, Z_{b(n)})) \rightarrow 0.$$

Andererseits muss auch  $\sum_{j > n/2}^n C_j^{(n)} \leq 1$  gelten, nachdem die Konstruktion höchstens eine Komponente mit einer Größe größer als  $n/2$  enthalten kann. Damit ist  $C_j^{(n)} = 1$  genau dann, wenn  $j = n - T_{0b(n)}$  und ansonsten, oder für  $T_{0b(n)} = n$ , gilt  $C_j^{(n)} = 0$ . Damit ist die Verteilung gezeigt. □

Die Grenzverteilung ist also die Verteilung der  $Z_i$  zusammen mit einer einzelnen sehr großen Komponente. Insbesondere ist die Verteilung der kleinen Komponenten unabhängig. Für festgehaltenes  $k$  und  $n \rightarrow \infty$  gilt also

$$\mathcal{L}(C_1^{(n)}, \dots, C_k^{(n)}) \rightarrow_d \mathcal{L}(Z_1, \dots, Z_k)$$

und für die größte Komponente  $L(n)$  und die kleinste Komponente  $K(n)$  gilt für festes  $b > 0$

$$\mathcal{L}(n - L(n)) \rightarrow_d \mathcal{L}(T_{0n}(Z))$$

und

$$\Pr(K(n) > b) \rightarrow \prod_{i=1}^b \Pr(Z_i = 0).$$

Für die Anzahl der Komponenten  $X(n)$  gilt

$$\mathcal{L}(X(n)) \rightarrow_d \mathcal{L}\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} Z_j\right).$$

**Beispiel 16.** Wenn wir Wälder aus unmarkierten Bäumen betrachten, dann ist die Anzahl dieser Bäume der Größe  $j$  durch  $M_j \sim c\rho^{-j}j^{-5/2}$  gegeben. Nachdem die Wälder Multimengen sind, ist die Bedingung der bedingten Wahrscheinlichkeit mit  $Z_j \sim NB(M_j, \rho^j)$  erfüllt. Die negative Binomialverteilung ist unendlich teilbar und es lässt sich zeigen, dass auch die anderen Bedingungen erfüllt sind.

## 8.4 Divergente Strukturen

Die Ergebnisse hier stammen aus [15] von Freiman und Granovsky mit einigen Ergänzungen von [14]. Wir betrachten Strukturen mit erzeugender Funktion

$$C(z) = e^{A(z)}$$

mit

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$



so dass

$$a_n = L(n)n^{l-1}, l > 0$$

für eine differenzierbare Funktion  $L(n)$ , die wie bei den konvergenten Strukturen im Unendlichen wenig variiert, gilt.

Wir verwenden wieder die Definitionen von  $s_m(z) = \sum_{j=1}^m a_j z^j$  und führen die Zwischensumme  $r_{m,n}(z) := \sum_{j=m+1}^n a_j z^j$  ein. Wir wollen die Bezeichnungen des Artikels beibehalten und alle Variablen für Konstruktionen, die nur aus Elementen bis zu einer bestimmten Größe zusammengesetzt sind, als  $\underline{X}$  bezeichnen und wenn die Elemente größer als eine untere Schranke sind, schreiben wir  $\bar{X}$ . Wir betrachten nun die erzeugende Funktionen von Strukturen, die nur aus Elementen bis zur Größe  $m$  beziehungsweise Elementen mit Größen zwischen  $m$  und  $n$  zusammengesetzt sind und erhalten

$$\underline{G}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{g}_k z^k = e^{s_m(z)}, \quad \bar{G}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{g}_k z^k = e^{r_{m,n}(z)}.$$

Hier ist  $\underline{g}_n$  die Anzahl der Strukturen der Größe  $n$ , die nur aus Komponenten der Größe höchstens  $m$  zusammengesetzt sind und  $\bar{g}_n$  die Anzahl der Strukturen der Größe  $n$ , deren Komponenten größer als  $m$  sind. Wir schreiben

$$\underline{G}_n = e^{s_r(z)} = \prod_{j=0}^r \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_j^k z^{kj} \right)$$

oder die äquivalente Darstellung von  $e^{r_{m,n}(z)}$ . Nun setzen wir für zunächst beliebiges  $\sigma \in \mathbb{R}$

$$z = e^{-\sigma + 2\pi i \alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

und erhalten aus der Cauchyschen Integralformel die folgenden Darstellungen

$$\underline{g}_n = e^{n\sigma} \int_0^1 \prod_{j=1}^r \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_j^k e^{-jk\sigma + 2i\pi\alpha jk}}{k!} \right) e^{-2i\pi\alpha n} d\alpha,$$

$$\bar{g}_n = e^{n\sigma} \int_0^1 \prod_{j=r}^n \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_j^k e^{-jk\sigma + 2i\pi\alpha jk}}{k!} \right) e^{-2i\pi\alpha n} d\alpha.$$

Wir können nun unabhängige poisson-verteilte Zufallsvariablen  $Z_j \sim Po(a_j e^{-\sigma j})$  definieren, diese haben die Punktwahrscheinlichkeiten

$$p_{jk} = \mathbf{Pr}(Z_j = k) = \frac{(a_j e^{-\sigma j})^k}{k! \exp(a_j e^{-\sigma j})}.$$

Die Funktion

$$\phi_j(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{jk} e^{2\pi i \alpha jk}$$

ist dann die charakteristische Funktion der Zufallsvariable  $jZ_j$ . Dann sind

$$\underline{\phi}_r(\alpha) = \prod_{j=1}^r \phi_j(\alpha), \quad \bar{\phi}_r(\alpha) = \prod_{j=r}^n \phi_j(\alpha)$$

die charakteristischen Funktionen der Summe  $T_{0r} = 1Z_1 + \dots + rZ_r$  beziehungsweise  $T_{rn} = rZ_r + \dots + nZ_n$ . Dann erhalten wir auch

$$\mathbf{Pr}(T_{0r} = n) = \int_0^1 \underline{\phi}_r(\alpha) e^{-2i\pi\alpha n} d\alpha,$$

$$\mathbf{Pr}(T_{rn} = n) = \int_0^1 \bar{\phi}_r(\alpha) e^{-2i\pi\alpha n} d\alpha.$$

Wir haben also vom Ansatz her die selbe Situation wie in den vorigen Kapiteln, allerdings wird die Behandlung mit analytischen Methoden erfolgen, dieser Ansatz wurde von Chinčín [7] für die Beschreibung von Teilchenstatistiken zuerst verwendet. Mit diesen Notationen können wir die Integraldarstellung von vorher umschreiben zu

$$\underline{g}_n = \exp(s_m(e^{-\sigma}) + n\sigma) \int_0^1 \underline{\phi}_r(\alpha) e^{-2i\pi\alpha n} d\alpha = \exp(s_m(e^{-\sigma}) + n\sigma) \mathbf{Pr}(T_{0r} = n),$$

$$\bar{g}_n = \exp(r_{m,n}(e^{-\sigma}) + n\sigma) \int_0^1 \bar{\phi}_r(\alpha) e^{-2i\pi\alpha n} d\alpha = \exp(r_{m,n}(e^{-\sigma}) + n\sigma) \mathbf{Pr}(T_{rn} = n).$$

Die bisher definierten Zusammenhänge gelten für jedes  $\sigma \in \mathbb{R}$ . Wir definieren  $\underline{\sigma}_n^r$  und  $\bar{\sigma}_n^r$  durch die Lösung von

$$\underline{M}_n := \sum_{j=1}^r j a_j e^{-\underline{\sigma}_n^r j} = n, \quad \bar{M}_n := \sum_{j=r}^n j a_j e^{-\bar{\sigma}_n^r j} = n.$$

Damit ist  $\mathbb{E}(T_{0r}) = n$  beziehungsweise  $\mathbb{E}(T_{rn}) = n$  und es wird sich zeigen, dass diese Annahme die Rechnung vereinfacht. Es gilt nach der Definition  $\frac{a_n}{a_{n+1}} \rightarrow 1$ , daraus können wir für  $r \sim n^\beta$  die Konvergenz von  $\sigma$  gegen 0 zeigen.

**Lemma 7.** *Für festes  $\epsilon > 0$  und  $r(n) \geq n^\epsilon$  gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\sigma}_n^r = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\sigma}_n^r.$$

*Beweis.* Für ein  $\epsilon$  mit  $1 - \epsilon \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \epsilon$  für alle  $n \geq n_0$  gilt

$$(1 - \epsilon)^{n-n_0} a_{n_0} \leq a_n \leq (1 + \epsilon)^{n-n_0} a_{n_0}.$$

Sei nun  $\sigma_n \rightarrow \sigma < 0$ . Dann gilt mit  $\epsilon < 1 - e^{\sigma/2}$  für ausreichend großes  $n$  auch  $(1 - \epsilon)e^{-\sigma_n} > e^{\sigma/2 - \sigma_n} > 1$  und damit

$$n^{-1} \sum_{j=1}^r a_j e^{-j\sigma_n} \geq (1 - \epsilon)^{-n_0} a_{n_0} \sum_{j=n_0}^r ((1 - \epsilon)e^{-\sigma_n})^j \rightarrow \infty$$

und das ist ein Widerspruch. Für  $\sigma > 0$  gilt mit  $\epsilon < e^{\sigma/2} - 1$

$$n^{-1} \left( \sum_{j=1}^{n_0} a_j e^{-j\sigma_n} + (1 + \epsilon)^{-n_0} a_{n_0} \sum_{j=n_0}^r ((1 + \epsilon)e^{-\sigma_n})^j \right) \rightarrow 0$$

und wir erhalten wieder einen Widerspruch. □

Wir können  $\underline{M}_n^r$  durch ein Integral approximieren und erhalten nach Substitution durch  $t = x/|\underline{\sigma}_n^r|$

$$n = \underline{M}_n^r \sim (|\underline{\sigma}_n^r|^{-(l+1)}) \int_{|\underline{\sigma}_n^r|}^{r|\underline{\sigma}_n^r|} t^l L\left(\frac{t}{|\underline{\sigma}_n^r|}\right) r^{-t} \text{sign}(\underline{\sigma}_n^r) dt$$

beziehungsweise

$$n = \overline{M}_n^r \sim (|\overline{\sigma}_n^r|^{-(l+1)}) \int_{r|\overline{\sigma}_n^r|}^{n|\overline{\sigma}_n^r|} t^l L\left(\frac{t}{|\overline{\sigma}_n^r|}\right) r^{-t} \text{sign}(\overline{\sigma}_n^r) dt.$$

Außerdem gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-|\sigma|} \sim \int_{\sigma}^{\infty} t^l L(t/\sigma) e^{-t} dt \sim \Gamma(1+l) L(1/\sigma)$$

wegen dem Verhalten der Koeffizienten. Es läßt sich zeigen, dass für eine Folge  $b_n \rightarrow b > 0$  und  $z_n \rightarrow \infty$  mit  $b_n z_n \rightarrow \infty$

$$\int_{b_n}^{\infty} e^{-t} t^l L(t z_n) dt \sim L(b_n z_n) \int_{b_n}^{\infty} e^{-t} t^l dt$$

erfüllt ist und falls es zusätzlich noch ein  $\delta > 0$  gibt, so dass die Funktion  $x^{-\delta} L(x)$  lokal beschränkt ist, gilt

$$\int_0^{b_n} e^{t} t^l L(t z_n) dt \sim L(b_n z_n) \int_0^{b_n} e^{t} t^l dt.$$

Diese Tatsachen lassen sich verwenden, um die auftretenden Summen abzuschätzen. Wir werden ab jetzt  $r = n^\beta$  für ein festes  $0 < \beta \leq 1$  betrachten. Dann lässt sich, wenn wir uns auf  $\beta \neq (l+1)^{-1}$  beschränken, zeigen, dass die folgenden Abschätzungen für  $\sigma_n^r$  Lösungen der obigen Gleichungen sind. Hier verwenden wir die Tatsache, dass es für jede Funktion, die im Unendlichen wenig variiert, eine eindeutige konjugierte Funktion  $L^*$  gibt, die im Unendlichen wenig variiert und  $L^*(x)L(xL^*(x)) \sim L(x)L^*(xL(x)) \sim 1$  erfüllt.

**Satz 8.21.** Für  $\underline{\beta} > (l+1)^{-1}$  und  $\overline{\beta} < (l+1)^{-1}$  gilt für  $n \rightarrow \infty$

$$\underline{\sigma}_n^r \sim \overline{\sigma}_n^r \sim \Gamma(l+1)^{1/(l+1)} n^{-\frac{1}{l+1}} L_1(n)$$

mit  $\frac{1}{L_1(n^{l+1})} \sim (L^{1/(l+1)}(n))^*$ .

Für  $\underline{\beta} < (l+1)^{-1}$  und  $\overline{\beta} > (l+1)^{-1}$  gilt

$$\underline{\sigma}_n^r \sim -\frac{\gamma \log n}{n^{\underline{\beta}}} \left(1 + \frac{\log(\gamma \log n)}{\gamma \log n}\right)$$

mit  $\gamma = 1 - (l+1)\underline{\beta} - \frac{\log L(r)}{\log n}$  beziehungsweise

$$\overline{\sigma}_n^r \sim -\frac{\gamma \log n}{n^{\overline{\beta}}} \left(1 - \frac{\log(\gamma \log n)}{\gamma \log n}\right)$$

mit  $\gamma = (l+1)\overline{\beta} - 1 + \frac{\log L(r)}{\log n}$ .

Wir benötigen noch die zweiten und dritten Momente, also die Größen

$$\mathbb{E}(\underline{Y}_r^2) = \underline{B}_n^{(r)2} = \sum_{j=1}^r j^2 a_j e^{-\sigma j}, \quad \mathbb{E}(\overline{Y}_r^2) = (\overline{B}_n^{(r)})^2 = \sum_{j=r}^n j^2 a_j e^{-\bar{\sigma} j}$$

und

$$\mathbb{E}(\underline{Y}_r^3) = \underline{\rho}_n^r = \sum_{j=1}^r j^3 a_j e^{-\sigma j}, \quad \mathbb{E}(\overline{Y}_r^3) = \overline{\rho}_n^r = \sum_{j=r}^n j^3 a_j e^{-\bar{\sigma} j}.$$

Als nächstes können wir davon ausgehend auch das Verhalten der zweiten und dritten Momente bestimmen.

**Satz 8.22.** *Es gilt*

$$\underline{B}^2 \sim \begin{cases} hn(\underline{\sigma}_n^r)^{-1} & \text{für } (l+1)^{-1} < \underline{\beta} \leq 1 \\ hnr & \text{für } \underline{\beta} < (l+1)^{-1} \leq 1, \end{cases}$$

$$\overline{B}^2 \sim \begin{cases} hn(\overline{\sigma}_n^r)^{-1} & \text{für } \overline{\beta} \leq (l+1)^{-1} \leq 1 \\ hnr & \text{für } (l+1)^{-1} \leq \overline{\beta} \leq 1 \end{cases}$$

für eine Konstante  $h$ , die aus der Integralform folgt und

$$\underline{\rho} \sim h \frac{(\underline{B}^2)^2}{n}, \quad \overline{\rho} \sim h \frac{(\overline{B}^2)^2}{n}.$$

*Beweis.* Die Summe wird durch das Integral

$$\int_1^r j^2 j^{-l-1} e^{-\sigma j} dj$$

approximiert. Ebenso kann  $\rho$  abgeschätzt werden.  $\square$

Wir haben nun die Voraussetzungen erfüllt, um das Verhalten von  $Pr(T_{0r} = n)$  beziehungsweise  $Pr(T_{rn} = n)$  zu bestimmen.

**Satz 8.23.** *Es gilt*

$$\mathbf{Pr}(T_{0r} = n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi \underline{B}^2}}$$

und

$$\mathbf{Pr}(T_{rn} = n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi \overline{B}^2}}.$$

*Beweis.* Wir betrachten nur  $T_{0r}$ , die Rechnung für  $T_{rn}$  funktioniert analog. Wir definieren das Integral

$$T := \int_0^1 \underline{\phi}_r(\alpha) e^{-2i\pi\alpha n} d\alpha,$$

und für ein zunächst beliebiges  $\alpha_0 \leq 1/2$  teilen wir den Integrationsweg in  $(-\alpha_0, \alpha_0)$  und  $(-1/2, \alpha_0) \cup (\alpha_0, 1/2)$ . Für  $\alpha \rightarrow 0$  können wir  $\underline{\phi}_r$  durch

$$\underline{\phi}_r(\alpha) = \exp\left(\sum_{j=1}^r a_j e^{-\sigma j} (e^{2\pi i \alpha j} - 1)\right)$$

darstellen und mit

$$e^{2\pi i \alpha j} - 1 = 2\pi i \alpha j - (2\pi \alpha j)^2 + O(\alpha^3 j^3)$$

erhalten wir durch  $\sum_{j=1}^r j a_j e^{-\sigma_j} = n$  die Darstellung

$$\underline{\phi}_r(\alpha) e^{-2\pi \alpha n} = \exp(-2\pi^2 \alpha^2 \underline{B}^2 + O(\alpha^3 \underline{\rho})).$$

Wir suchen nun  $\alpha_0 = \alpha_0(n)$  so, dass

$$\alpha_0^3 \underline{\rho} \rightarrow 0, \quad \alpha_0 \underline{B} \rightarrow \infty$$

erfüllt ist, dann ist der Fehler klein und wir können eine Sattelpunktmethode anwenden. Wenn wir  $\alpha_0^2 := \log^4(\underline{B}^2)/\underline{B}^2$  verwenden, gilt  $\alpha_0 \underline{B} \sim \log^2 \underline{B}^2 \rightarrow \infty$  und  $\alpha_0^3 \underline{\rho} \sim \frac{h \underline{B} \log^3 \underline{B}^2}{n} \rightarrow 0$ , also sind diese Bedingungen erfüllt. Damit erhalten wir

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \underline{\phi}_r(\alpha) e^{-2\pi \alpha n} d\alpha \sim \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \exp(-2\pi^2 \alpha^2 \underline{B}^2) d\alpha \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi \underline{B}^2}}$$

durch Vergleich mit einer Normalverteilung. Für das restliche Integral, also  $|\alpha| > |\alpha_0|$  betrachten wir

$$|\underline{\phi}_r(\alpha)| = \exp\left(\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^r a_j e^{-\sigma_n^r j} (e^{2\pi i \alpha j} - 1)\right)\right)$$

und nachdem  $\underline{\sigma}_n^r$  reell ist, erhalten wir mit  $\sin^2(\pi \alpha j) = -(e^{2i\pi \alpha j} + e^{-2i\pi \alpha j} - 2)/4$  die Darstellung

$$|\underline{\phi}_r(\alpha)| = \exp\left(-2 \sum_{j=1}^r a_j e^{-j \underline{\sigma}_n^r} \sin^2 \pi \alpha j\right).$$

Wir verwenden

$$2 \sum_{j=p}^{p+k-1} \sin^2 \pi \alpha j \geq \frac{k}{2} \min(1, (\alpha k)^2)$$

und setzen  $k := l |(\sigma_n^r)|^{-1}$ .

Für  $\beta < (l+1)^{-1}$  ist  $\underline{\sigma}_n^r \sim -(\gamma \log n)/n^\beta$  und damit  $\alpha_0^2 k^3 \sim \log^4(hnr) n^{2\beta-1}$  und nachdem  $\sigma_n^r < 0$  ist, ist für  $j$  nahe an  $r$  auch  $a_j e^{-j \sigma_n^r} \sim n^{\beta(l-1)} n$ , also gilt insgesamt  $|\underline{\phi}_r(\alpha)| = o(B^{-1})$ .

Für  $\beta > (l+1)^{-1}$  gilt  $\underline{\sigma}_n^r \sim n^{-1/(l+1)}$  und damit  $k(k\alpha_0)^2 \sim \log^4(hn\sigma^{-1})^{-1} (hn)^{-1} \sigma^{-1} \geq (\log n) n^{2/(l+1)-1}$  und für  $j \sim n^{1/(l+1)}$  sind die Summanden nach unten beschränkt, daher erhalten wir auch  $o(B^{-1})$ . Damit haben wir gezeigt, dass das Integral über  $|\alpha| > |\alpha_0|$  vernachlässigbar ist.  $\square$

Es gilt also

$$\underline{g}_n^r \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi \underline{B}^2}} (s_r(e^{-\sigma_n^r}) + n \underline{\sigma}_n^r)$$

und das analoge Ergebnis für  $\bar{g}_n^r$ . Darauf aufbauend können wir Ergebnisse für die Komponentengrößen zeigen.

**Satz 8.24.** *Wir schreiben  $l_n := \underline{g}_n^r/c_n$  und  $u_n := \bar{g}_n^r/c_n$ . Ist  $r = n^\beta$  für  $0 < \beta < 1$ , dann gilt für die Konstruktionen aus Komponenten mit maximaler Größe  $r$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq \beta < (l+1)^{-1}, \\ 1 & \text{für } (l+1)^{-1} < \beta \leq 1. \end{cases}$$

Für  $r \geq 2$  gilt für Konstruktionen mit Komponenten mit Größe mindestens  $r$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \begin{cases} 0 & \text{für } r = n^\beta, 0 < \beta < 1, \\ \exp\left(-\sum_{j=1}^r a_j\right) & \text{für festes } r. \end{cases}$$

**Beweis. Große Komponenten:** Wir betrachten

$$\Delta_n^r = s_r(e^{-\underline{\sigma}_n^r}) - s_n(e^{-\underline{\sigma}_n^n}) + n(\underline{\sigma}_n^r - \underline{\sigma}_n^n),$$

dann gilt  $l_n = e^{\Delta_n^r}$ . Damit reicht es,

$$\lim \Delta_n^r = \begin{cases} -\infty & \text{für } 0 < \beta < (l+1)^{-1}, \\ 0 & \text{für } (l+1)^{-1} < \beta \leq 1 \end{cases}$$

zu zeigen.

Für  $\beta < (l+1)^{-1}$  folgt das aus dem asymptotischen Verhalten der  $\underline{\sigma}_n^n$  und  $\underline{\sigma}_n^r$ , weil  $\underline{\sigma}_n^r \sim -\log n/n^\beta$  und  $\underline{\sigma}_n^n \sim n^{-1/(l+1)}$  gilt.

Für  $\beta > (l+1)^{-1}$  gilt  $\underline{\sigma}_n^r \sim \underline{\sigma}_n^n \sim n^{-1/(l+1)}$ . Wir verwenden

$$0 = \underline{M}_n^r - \underline{M}_n^n = \sum_{j=1}^{n^\beta} j a_j (e^{-j \underline{\sigma}_n^r} - e^{-j \underline{\sigma}_n^n}) - \sum_{j=n^\beta}^n j a_j e^{-j \underline{\sigma}_n^n}$$

Die letzte Summe ist asymptotisch  $\sum_{j=n^\beta}^n j^l e^{-j n^{-1/(l+1)}} \rightarrow 0$ . Wäre nun  $n(\underline{\sigma}_n^n - \underline{\sigma}_n^r) = \epsilon(n) > \epsilon > 0$ , dann würde die erste Summe

$$\sum_{j=1}^{n^\beta} j a_j e^{-j \underline{\sigma}_n^n} (e^{j/n\epsilon(n)} - 1) \sim \sum_{j=1}^{n^\beta} j a_j e^{-j \underline{\sigma}_n^n} j \frac{\epsilon(n)}{n}$$

erfüllen und für  $\beta > (l+1)^{-1}$  und  $j = n^{(l+1)^{-1}}$  gilt  $j^{l+1} e^{-j \underline{\sigma}_n^n} \epsilon(n)/n \geq \epsilon(n) e^{-1}$ , also erhalten wir einen Widerspruch. Ähnlich können wir  $s_r(e^{-\underline{\sigma}_n^r}) - s_n(e^{-\underline{\sigma}_n^n}) \rightarrow 0$  zeigen und daraus folgt die Behauptung.

**Kleine Komponenten:** Wir beginnen mit der analogen Formel wie bei den großen Komponenten. Wenn wir  $\beta > \epsilon$  betrachten, können wir die Asymptotik von  $\bar{\sigma}_n^r$  verwenden, es ergibt sich  $\bar{\sigma}_n^r \sim n^{-1/(l+1)}$  oder  $\bar{\sigma}_n^r \sim -\frac{\log n}{n^\beta}$  und  $\bar{\sigma}_n^n \sim -\frac{\log n}{n}$ .

Für fixes  $r$  gilt wieder  $\bar{\sigma}_n^r \sim \bar{\sigma}_n^1 \sim n^{-1/(l+1)}$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\bar{\sigma}_n^r - \bar{\sigma}_n^1) = 0,$$

weil ansonsten  $\sum_{j=r+1}^n j a_j (e^{-j \bar{\sigma}_n^r} - e^{-j \bar{\sigma}_n^1})$  unbeschränkt wäre. Damit erhalten wir

$$r_{r,n}(e^{-\bar{\sigma}_n^r}) - r_{1,n}(e^{-\bar{\sigma}_n^1}) = \sum_{j=1}^n a_j e^{-\bar{\sigma}_n^1 j} (e^{-(\bar{\sigma}_n^r - \bar{\sigma}_n^1)j} - 1) - \sum_{j=1}^{r-1} a_j e^{-\bar{\sigma}_n^r j}$$

und der erste Summand konvergiert gegen Null, weil aus der Taylorreihe der Exponentialfunktion

$$e^{-(\bar{\sigma}_n^r - \bar{\sigma}_n^1)j} - 1 \sim \bar{\sigma}_n^1 - \bar{\sigma}_n^r \rightarrow 0$$

folgt.

□

Die hier gezeigten Zusammenhänge gelten für Mengen von markierten Objekten und Multimengen. Bei Mengen von markierten Objekten ist das klar. Eine Multimenge mit erzeugender Funktion  $M = \sum m_j z^j$  erfüllt ja die Darstellung  $C(z) = \prod (1 - z^j)^{-m_j}$ . Sind dann  $a_j$  die Koeffizienten von  $A(z)$  für  $C(z) = e^{A(z)}$ , dann folgt aus  $m_j \sim h^j j^{l-1} L(j)$  auch  $a_j \sim m_j$ . Die Wahrscheinlichkeit, ein Objekt mit einem bestimmten Vektor von Komponentengrößen zu erhalten, ist nicht von  $h$  abhängig. Wir können also von dem Verhalten von  $h^{-j} a_j$  auf  $a_j$  schließen, daher sind die obigen Resultate auch darauf anwendbar.

Aus dem Verhalten für  $l_n$  ist abzulesen, dass die größte Komponente eine Größe von etwa  $n^{1/(l+1)}$  hat. Das steht im Gegensatz zum Verhalten im konvergenten Fall, bei dem die Strukturen typischerweise aus einer sehr großen Komponente und einigen kleinen Komponenten zusammengesetzt waren. Im logarithmischen Fall sind die größten Komponenten linear zu  $n$ . Ebenso haben wir erhalten, dass die Größe der kleinsten Komponente  $o(n^\epsilon)$  für jedes  $\epsilon > 0$  ist. Für eine Folge von festgehaltenen Komponentengrößen  $K_{p(i)} = k_i, i = 1, \dots, s$  gilt auch

$$\Pr(K_{p(1)} = k_1, \dots, K_{p(s)} = k_s) = \prod_{j=1}^s \frac{a_{p_j}^{k_j}}{k_j!} e^{-a_{p_j}},$$

das folgt, weil  $\sigma \rightarrow 0$  auch unter dieser Einschränkung gilt und sich wieder das uneingeschränkte  $\sigma$  verhält. Insbesondere ist auch die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Struktur Komponenten einer beliebigen kleinen Größe  $k$  besitzt, von Null weg beschränkt.

**Beispiel 17.** Zahlenpartitionen sind eine Multimenge und haben die erzeugende Funktion  $\prod_{i=1}^{\infty} (1 - z^i)^{-1}$ . Nach Umformen ergibt sich  $\exp \sum_{i=1}^{\infty} z^i \sum \frac{1}{k}$ . Damit fallen sie mit

$$a_n = \sum_{d|n} \frac{1}{d} \leq \log n$$

in die betrachtete Klasse mit  $l = 1$ . Insbesondere hat die größte Komponente dann in etwa die Größe  $n^{1/2}$ .

## 8.5 Zusammenfassung

Wir betrachten für Konstruktionen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten  $Z_i \sim n^l$  einige Kenngrößen. Nachdem wir für unterschiedliche Ansätze auch unterschiedlich genaue Ergebnisse bekommen haben

### Die Verteilung der größten Komponenten:

- Für konvergente Strukturen erfüllt die größte Komponente asymptotisch  $n - O(1)$  (Satz 8.20).
- Für logarithmische Strukturen ist der Komponentenvektor der  $k$  größten Komponenten nach der Poisson-Dirichlet-Verteilung verteilt und die Dichte ist asymptotisch  $n^k f_\phi(x_1, \dots, x_k)$  (Sätze 8.5, 8.16).
- Für divergente Strukturen hat die größte Komponente annähernd die Größe  $n^{\frac{1}{l+2}}$  (Satz 8.24).

**Die Verteilung der kleinsten Komponenten** entspricht in allen Fällen der Verteilung des Komponentenvektors der  $Z_i$  (Satz 8.20),(Sätze 8.3, 8.15),(Satz 8.24). Für eine logarithmische Struktur ist die Verteilung der kleinsten Komponente wieder durch die verallgemeinerte Buchstab-Funktion (Satz 8.4) gegeben.

**Die Verteilung des summierten Komponentenvektors:**

- Für konvergente Strukturen bleibt  $T_{0n}$  nach der Definition beschränkt, also ist auch  $n\mathbf{Pr}(T_{0n} = n)$  asymptotisch  $o(1)$ .
- Für logarithmische Strukturen gilt  $n^{-1}T_{0n} \sim P_\phi$  (Satz 8.1) und  $n\mathbf{Pr}(T_{0n} = n) \sim p_\phi(1)$  (Satz 8.1).
- Für divergente Strukturen ist, mit der passenden Skalierung und den dort verwendeten Bezeichnungen,  $n\mathbf{Pr}(T_{0n} = n) \sim n/\sqrt{2\pi B^2}$  (Satz 8.23).



## Literatur

- [1] Cyril Banderier, Philippe Flajolet, Gilles Schaeffer, and Michèle Soria. Random maps, coalescing saddles, singularity analysis, and airy phenomena. *Random Structures & Algorithms*, 2001.
- [2] A.D. Barbour and Louis Chen, editors. *An Introduction to Stein's Method*. Singapore, 2005.
- [3] A.D. Barbour and Boris L. Granovsky. Random combinatorial structures: the convergent case. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 2005.
- [4] Edward A Bender and Zhicheng Gao. Part sizes of smooth supercritical compositional structures. *Combinatorics, Probability and Computing*, 2013.
- [5] Edward A. Bender, Atefeh Mashatan, Daniel Panario, and L. Bruce Richmond. Asymptotics of combinatorial structures with large smallest component. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 2003.
- [6] N G De Bruijn. *Asymptotic Methods in Analysis*. North-Holland Publishing, 1958.
- [7] Chinčín. *Mathematische Grundlagen der Quantenstatistik*. Akademie-Verlag, 1956.
- [8] Li Dong, Zhicheng Gao, Daniel Panario, and Bruce Richmond. Asymptotics of smallest component sizes in decomposable combinatorial structures of alg-log type. *Discrete Mathematics and theoretical Computer Science*, 2010.
- [9] Canfield Edward Bender and Richmond. Components of functional compositions often grow smoothly. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 2008.
- [10] Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. John Wiley and Sons, 1966.
- [11] Philippe Flajolet and Andrew Odlyzko. Singularity analysis of generating functions. *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, 1990.
- [12] Philippe Flajolet and Michèle Soria. General combinatorial schemas: Gaussian limit distributions and exponential tails. *Discrete Mathematics*, 1993.
- [13] Sedgewick Flajolet. *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, 2009.
- [14] Gregory A. Freiman and Boris L. Granovsky. Asymptotic formula for a partition function of reversible coagulation-fragmentation processes. *Israel Journal of Mathematics*, 2002.
- [15] Gregory A. Freiman and Boris L. Granovsky. Clustering in coagulation-fragmentation processes, random combinatorial structures and additive number systems: Asymptotic formulae and limiting laws. *Transactions of the American Mathematical Society*, 357(6):2483–2507, 2004.
- [16] Bert Fristedt. The structure of random partitions of large integers. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1993.

- [17] Xavier Gourdon. *Combinatoire, Algorithmique et géométrie des polynômes*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1996.
- [18] Xavier Gourdon. Largest component in random combinatorial structures. *Discrete Mathematics*, 1998.
- [19] Mohamed Omar, Daniel Panario, Bruce Richmond, and Jacki Whitely. Asymptotics of largest components in combinatorial structures. *Algorithmica*, 2006.
- [20] D. Panario and B. Richmond. Smallest components in decomposable structures: Exp-log class. *Algorithmica*, 2001.
- [21] Simon Tavaré Richard Arratia, A.D Barbour. *Logarithmic Combinatorial Structures: a Probabilistic Approach*. European Mathematical Society, 2003.
- [22] Walter Rudin. *Reelle und komplexe Analysis*. München Wien Oldenbourg, 1999.
- [23] Gerald Tenenbaum. *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory*. Cambridge University Press, 1995.
- [24] Webel and Wied. *Stochastische Prozesse*. Springer Gabler, 2016.