Lineare Gleichungssysteme mit spezieller Systemmatrix

LGS mit spezieller Systemmatrix

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
x_1 & + & 0 & + & \cdots & + & \cdots & + & 0 & + & a_{1,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = b_1 \\
0 & + & x_2 & + & 0 & + & \cdots & + & 0 & + & a_{2,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = b_2 \\
\vdots & + & \ddots & + & \ddots & + & \ddots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = \vdots \\
0 & + & \cdots & + & \cdots & + & x_{m-1} & + & 0 & + & a_{m,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = b_{m-1} \\
0 & + & \cdots & + & \cdots & + & 0 & + & x_m & + & a_{m,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = b_m
\end{array}
$$

LGS mit spezieller Systemmatrix

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
x_1 & + & 0 & + & \cdots & + & \cdots & + & 0 & + & a_{1,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
0 & + & x_2 & + & 0 & + & \cdots & + & 0 & + & a_{2,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & + & \ddots & + & \ddots & + & \ddots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\
0 & + & \cdots & + & \cdots & + & x_{m-1} & + & 0 & + & a_{m,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_{m-1} \\
0 & + & \cdots & + & \cdots & + & 0 & + & x_m & + & a_{m,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

Setzt man $x_{m+1} = t_1, \ldots, x_n = t_{n-m}$, so folgt (für $i = 1, \ldots, m$)

$$x_i \;=\; b_i - t_1 a_{i,m+1} - \cdots - t_{n-m} a_{i,n},$$

LGS mit spezieller Systemmatrix

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
x_1 & + & 0 & + & \cdots & + & \cdots & + & 0 & + & a_{1,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = b_1 \\
0 & + & x_2 & + & 0 & + & \cdots & + & 0 & + & a_{2,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = b_2 \\
\vdots & + & \ddots & + & \ddots & + & \ddots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = \vdots \\
0 & + & \cdots & + & \cdots & + & x_{m-1} & + & 0 & + & a_{m,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = b_{m-1} \\
0 & + & \cdots & + & \cdots & + & 0 & + & x_m & + & a_{m,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = b_m
\end{array}$$

Setzt man $x_{m+1} = t_1, \ldots, x_n = t_{n-m}$, so folgt (für $i = 1, \ldots, m$)

$$x_i \;=\; b_i - t_1 a_{i,m+1} - \cdots - t_{n-m} a_{i,n},$$

also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t_1 a_{1,m+1} - \cdots - t_{n-m} a_{1,n} \\ \vdots \\ -t_1 a_{m,m+1} - \cdots - t_{n-m} a_{m,n} \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-m} \end{pmatrix}.$$

LGS mit spezieller Systemmatrix

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,m}x_m & + & a_{1,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
0 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,m}x_m & + & a_{2,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & + & \ddots & + & \ddots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\
0 & + & \cdots & + & 0 & + & a_{m,m}x_m & + & a_{m,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

LGS mit spezieller Systemmatrix

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,m}x_m & + & a_{1,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
0 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,m}x_m & + & a_{2,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & + & \ddots & + & \ddots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\
0 & + & \cdots & + & 0 & + & a_{m,m}x_m & + & a_{m,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Setzt man $x_{m+1} = t_1, \ldots, x_n = t_{n-m}$, so folgt

$$x_m = \frac{b_m - t_1 a_{m,m+1} - \cdots - t_{n-m} a_{m,n}}{a_{m,m}} = b'_m + t_1 a'_{1,m} + \cdots + t_{n-m} a'_{n-m,m}$$

LGS mit spezieller Systemmatrix

$$\begin{array}{cccccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + a_{1,2}x_2 & + \cdots + & a_{1,m}x_m & + & a_{1,m+1}x_{m+1} & + \cdots + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
0 & + a_{2,2}x_2 & + \cdots + & a_{2,m}x_m & + & a_{2,m+1}x_{m+1} & + \cdots + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & + \quad \ddots & + \ddots + & \vdots & + & \vdots & + \vdots + & \vdots & = & \vdots \\
0 & + \quad \cdots & + \; 0 \; + & a_{m,m}x_m & + & a_{m,m+1}x_{m+1} & + \cdots + & a_{m,n}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Setzt man $x_{m+1} = t_1, \ldots, x_n = t_{n-m}$, so folgt

$$x_m \;=\; \frac{b_m - t_1 a_{m,m+1} - \cdots - t_{n-m}a_{m,n}}{a_{m,m}} = b'_m + t_1 a'_{1,m} + \cdots + t_{n-m}a'_{n-m,m}$$

und daraus

$$\begin{aligned}
x_{m-1} \;&=\; \frac{b_{m-1} - a_{m-1,m}x_m - t_1 a_{m-1,m+1} - \cdots t_{n-m}a_{m-1,n}}{a_{m-1,m-1}} \\
&=\; b'_{m-1} + t_1 a'_{1,m-1} + \cdots + t_{n-m}a'_{n-m,m-1}.
\end{aligned}$$

LGS mit spezieller Systemmatrix

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,m}x_m & + & a_{1,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
0 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,m}x_m & + & a_{2,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & + & \ddots & + & \ddots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\
0 & + & \cdots & + & 0 & + & a_{m,m}x_m & + & a_{m,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Setzt man $x_{m+1} = t_1, \ldots, x_n = t_{n-m}$, so folgt

$$x_m = \frac{b_m - t_1 a_{m,m+1} - \cdots - t_{n-m} a_{m,n}}{a_{m,m}} = b'_m + t_1 a'_{1,m} + \cdots + t_{n-m} a'_{n-m,m}$$

und daraus

$$\begin{aligned}
x_{m-1} &= \frac{b_{m-1} - a_{m-1,m}x_m - t_1 a_{m-1,m+1} - \cdots t_{n-m} a_{m-1,n}}{a_{m-1,m-1}} \\
&= b'_{m-1} + t_1 a'_{1,m-1} + \cdots + t_{n-m} a'_{n-m,m-1}.
\end{aligned}$$

Danach berechnet man rekursiv $x_{m-2}, x_{m-3}, \ldots, x_1$.

Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Beispiel 1

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\
2x_1 & + & 5x_2 & & & + & x_4 & = & 4 \\
3x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 5 \\
x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & - & 7x_4 & = & -1
\end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 1

Elementare Zeilenumformungen durchführen:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -7 & -1 \end{array}\right)$$

Beispiel 1

Elementare Zeilenumformungen durchführen:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -7 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \end{array}\right)$$

Beispiel 1

Elementare Zeilenumformungen durchführen:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -7 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Beispiel 1

Elementare Zeilenumformungen durchführen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -7 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

LGS ist lösbar wegen des Satzes von Kronecker-Capelli!

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -10 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Beispiel 1

Elementare Zeilenumformungen durchführen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -7 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

LGS ist lösbar wegen des Satzes von Kronecker-Capelli!

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -10 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ d.h., } \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & - & 10x_3 & + & 13x_4 & = & 7 \\ & & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & -2 \end{array}$$

Beispiel 1

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -10 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ d.h., } \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & - & 10x_3 & + & 13x_4 & = & 7 \\ & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & -2 \end{array}$$

Alle Lösungen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -10 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ d.h.,} \quad \begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & - & 10x_3 & + & 13x_4 & = & 7 \\ & & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & -2 \end{array}$$

Alle Lösungen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -13 \\ -4 & 5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 19x_1 + 27x_2 + 31x_3 &= 51 \end{aligned}$$

Beispiel 2

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\
2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\
19x_1 + 27x_2 + 31x_3 &= 51
\end{aligned}
$$

Erweiterte Systemmatrix

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
3 & 4 & 2 & 5 \\
2 & 3 & 5 & 7 \\
19 & 27 & 31 & 51
\end{array}\right)
$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 19x_1 + 27x_2 + 31x_3 &= 51 \end{aligned}$$

Erweiterte Systemmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 19 & 27 & 31 & 51 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & 11 \\ 0 & 5 & 55 & 58 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Beispiel 2

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5\\
2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 7\\
19x_1 + 27x_2 + 31x_3 &= 51
\end{aligned}
$$

Erweiterte Systemmatrix

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5\\ 2 & 3 & 5 & 7\\ 19 & 27 & 31 & 51 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 11 & 11\\ 0 & 5 & 55 & 58 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 11 & 11\\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)
$$

unlösbar!

Beispiel 3

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Beispiel 3

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & -5 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

Beispiel 3

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & -5 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

$$x_3 = \frac{2}{5}, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = -\frac{1}{5} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Beispiel 4

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_4 &= -6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Beispiel 4

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_4 &= -6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 14 & 6 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{s_3 \leftrightarrow s_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Beispiel 4

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 \qquad\quad + 2x_4 &= -6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 14 & 6 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{s_3 \leftrightarrow s_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \lambda, \\ x_4 &= -1, \\ x_2 &= 2 - 2\lambda, \\ x_1 &= 1 - 3\lambda \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 - 3\lambda \\ 2 - 2\lambda \\ \lambda \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$