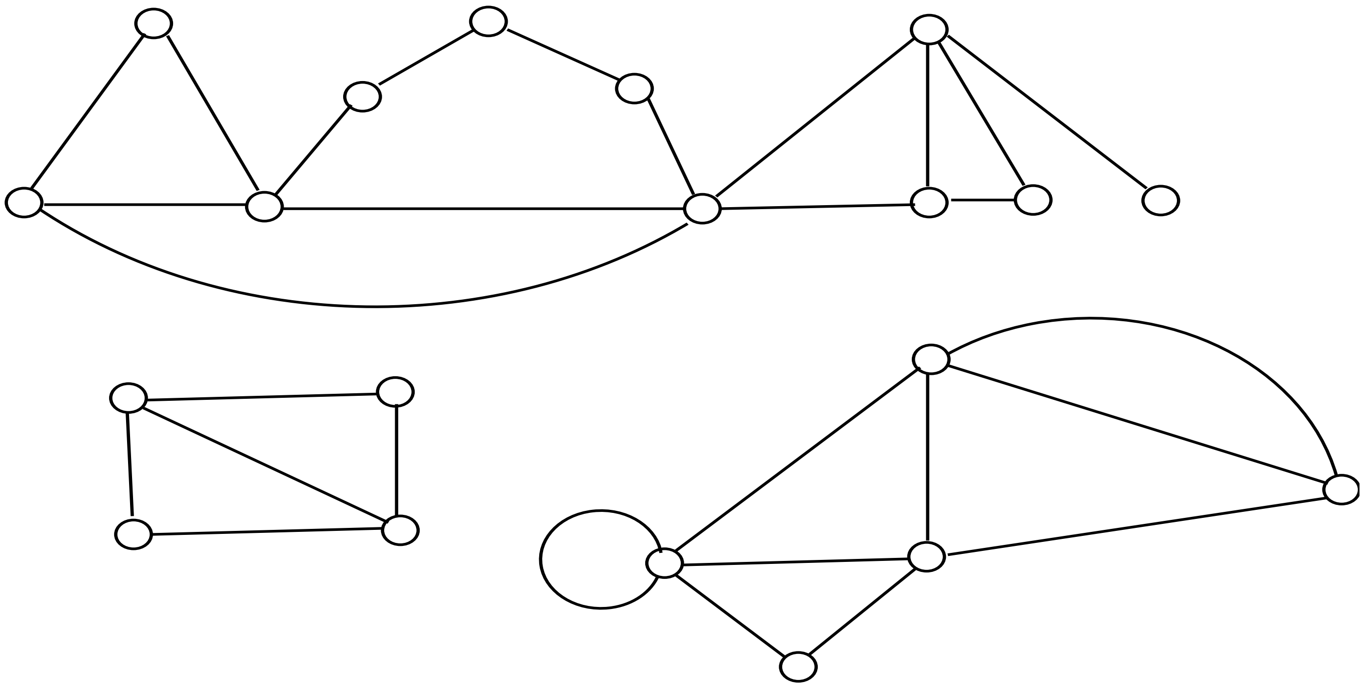
GRUNDBEGRIFFE DER GRAPHENTHEORIE

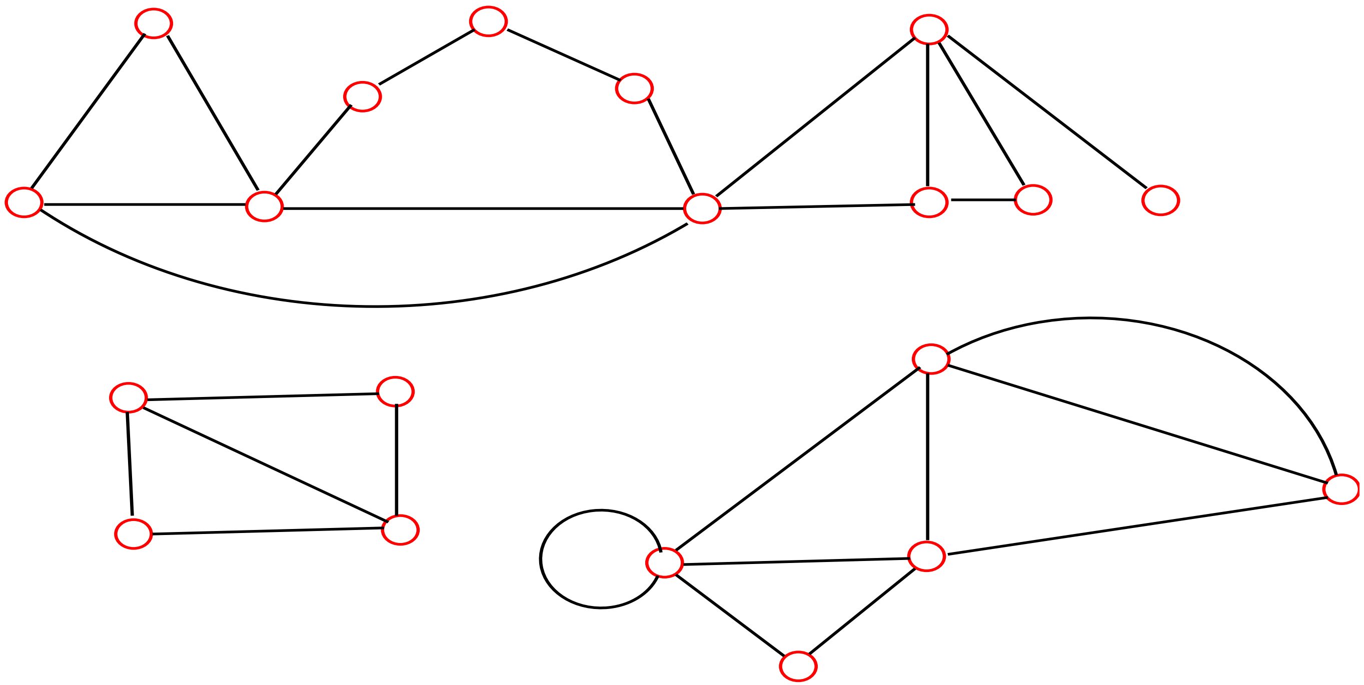
Grundbegriffe der Graphentheorie

Ungerichteter Graph



Grundbegriffe der Graphentheorie

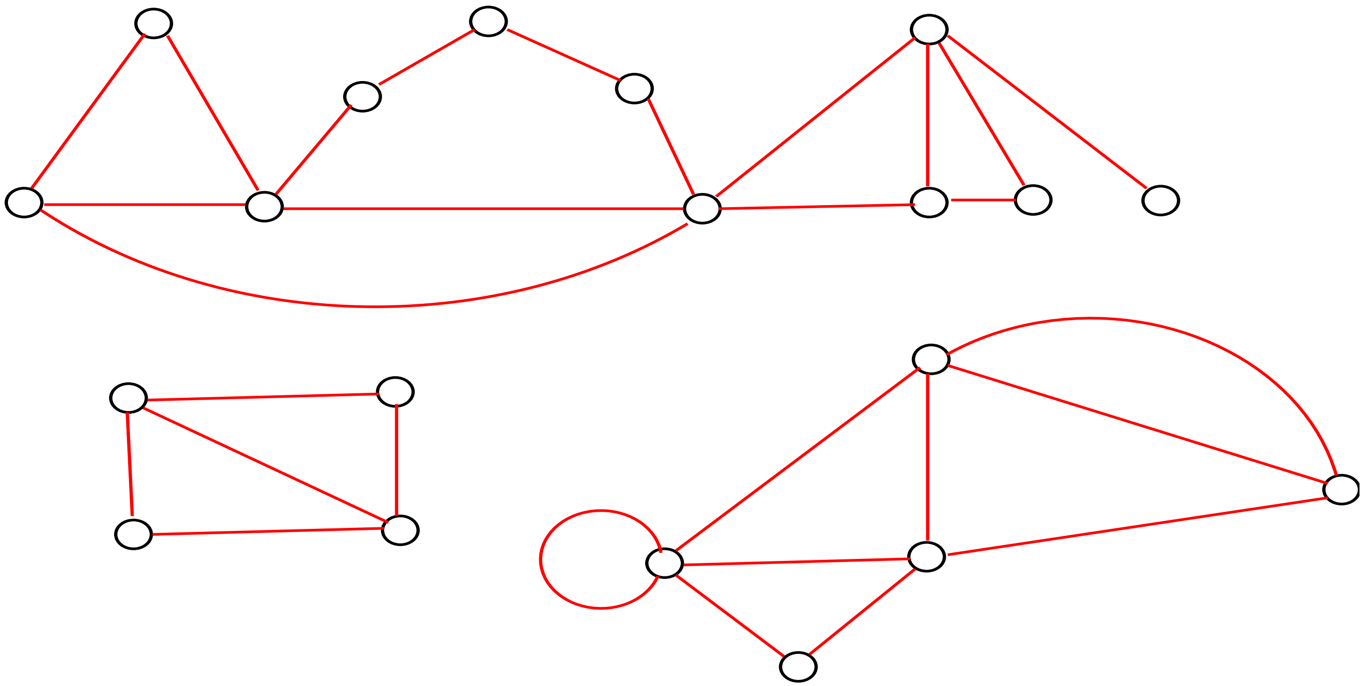
Die Knoten des Graphen



Knotenmenge V, $\alpha_0 := |V|$

Grundbegriffe der Graphentheorie

Die Kanten des Graphen

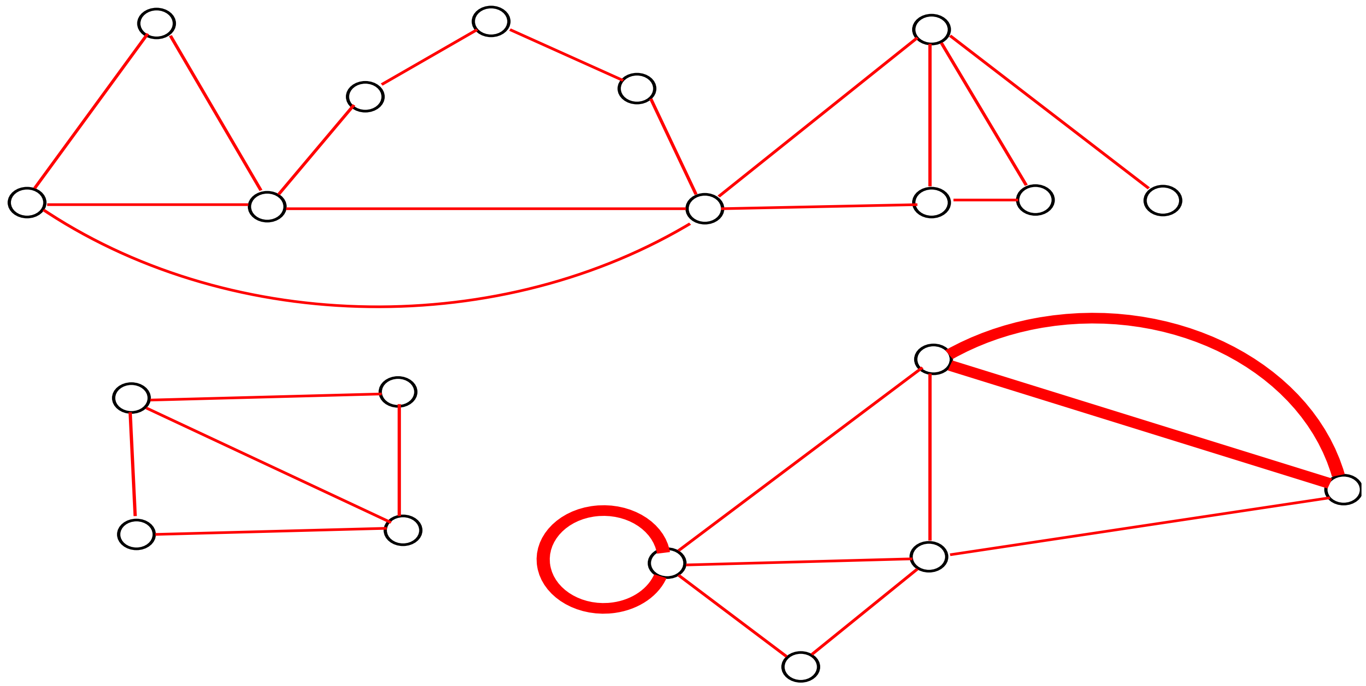


Kantenmenge E, $\alpha_1 := |E|$, $\longrightarrow$ Graph $G = (V, E)$

Dichte $\varepsilon(G) = \frac{|E|}{|V|}$

Grundbegriffe der Graphentheorie

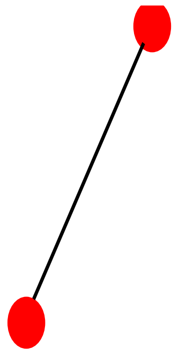
Spezielle Kanten: Schlingen und Mehrfachkanten

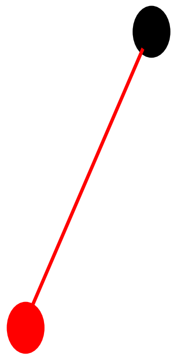


Graphen ohne Schlingen und Mehrfachkanten: **schlichte** Graphen

Grundbegriffe der Graphentheorie

Adjazenz und Inzidenz

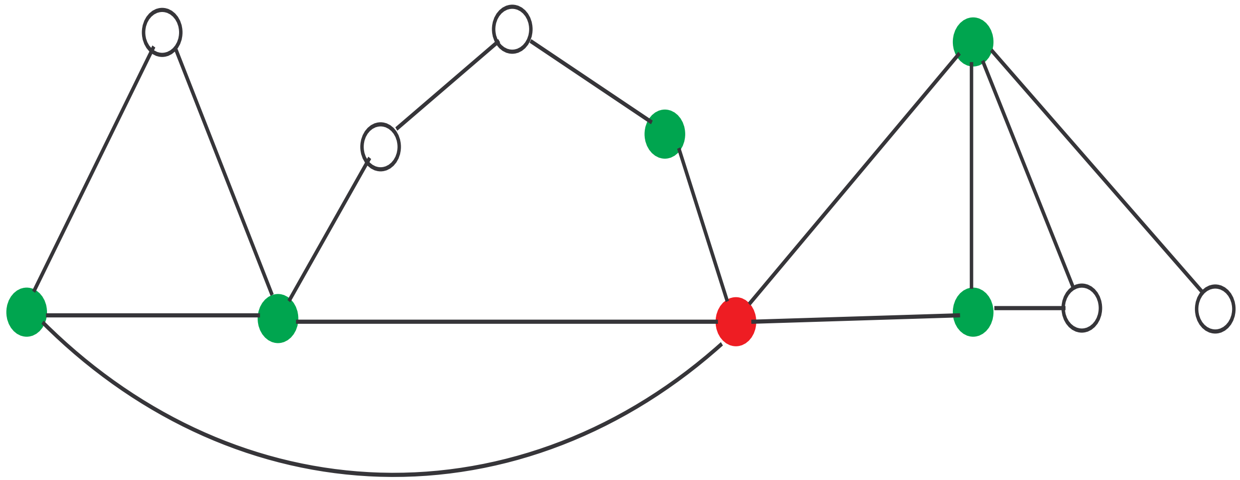




Grundbegriffe der Graphentheorie

Ein Knoten v und die Menge seiner Nachbarn $\Gamma(v)$

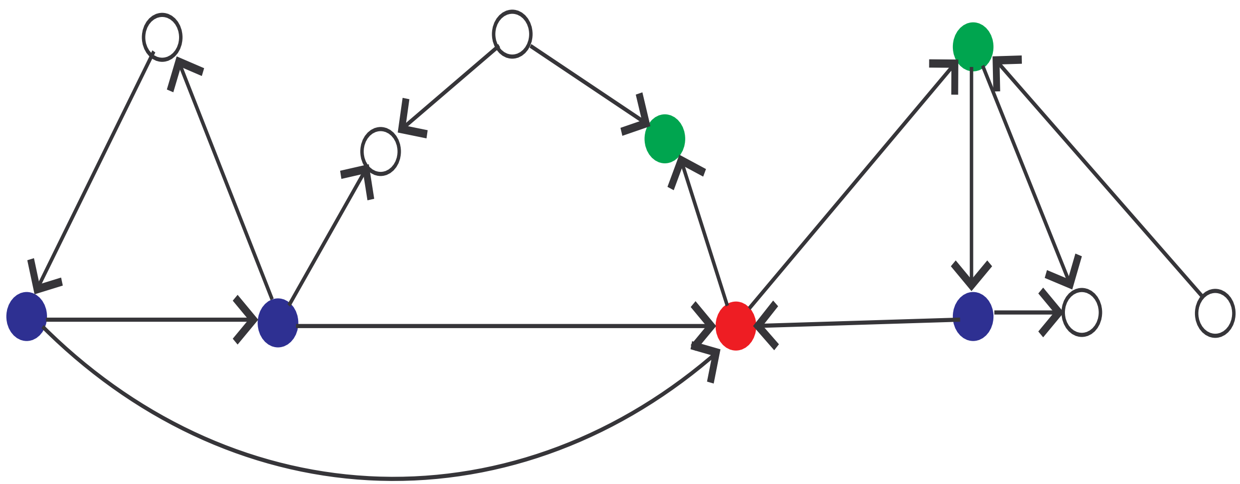
$d(v) = d_G(v) = |\Gamma(v)| =$ der Grad von v



$\delta(G) = \min_{v \in V} d(v), \qquad \Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$

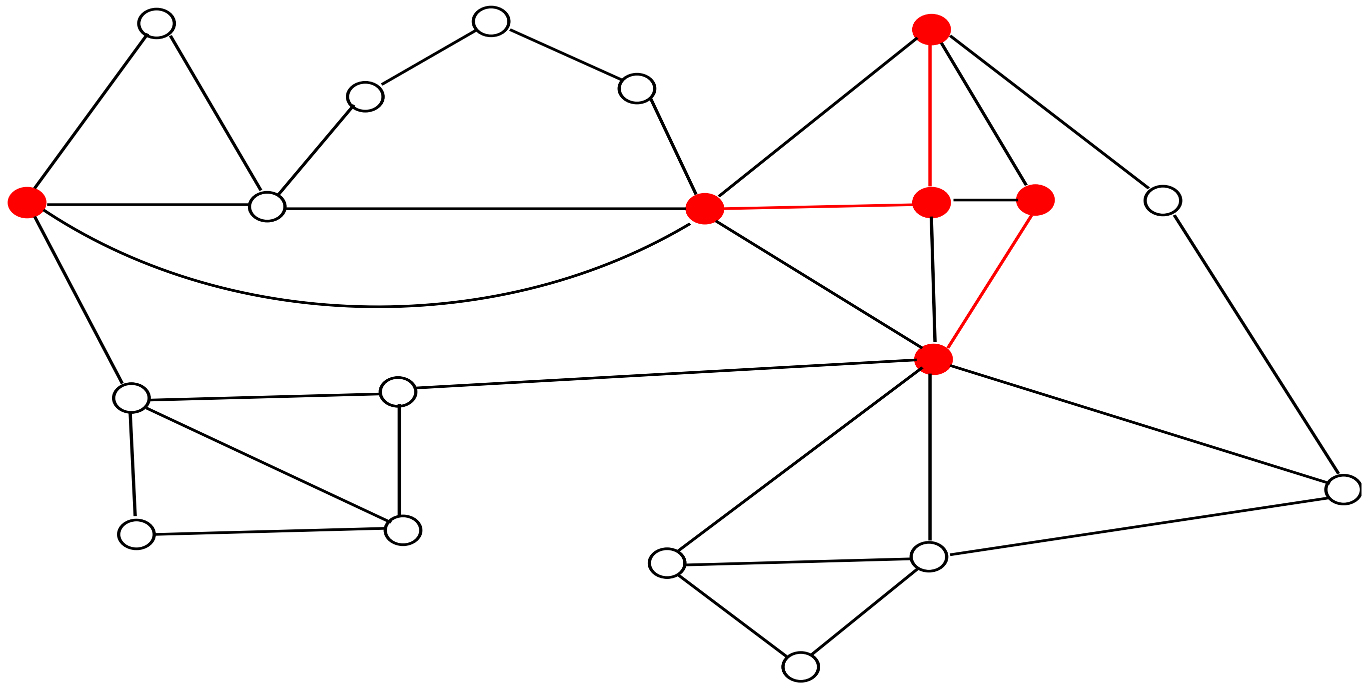
Grundbegriffe der Graphentheorie

Gerichteter Fall: Nachfolger $\Gamma^+(v)$ und Vorgänger $\Gamma^-(v)$
$d^+(v) = |\Gamma^+(v)|$ bzw. $d^-(v) = |\Gamma^-(v)|$: Weggrad bzw. Hingrad von v



Grundbegriffe der Graphentheorie

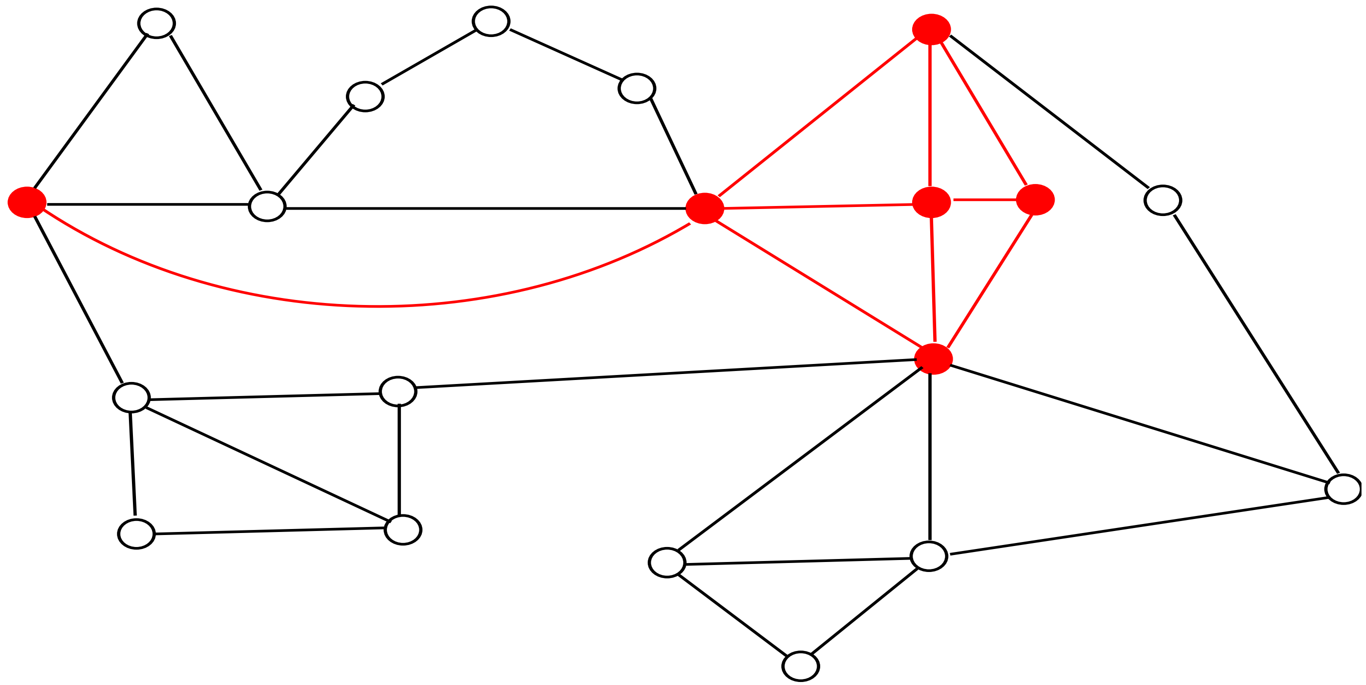
Ein Graph G und einer seiner Teilgraphen, G'



$$G' = (V', E'), \qquad V' \subseteq V, \quad E' \subseteq E$$

Grundbegriffe der Graphentheorie

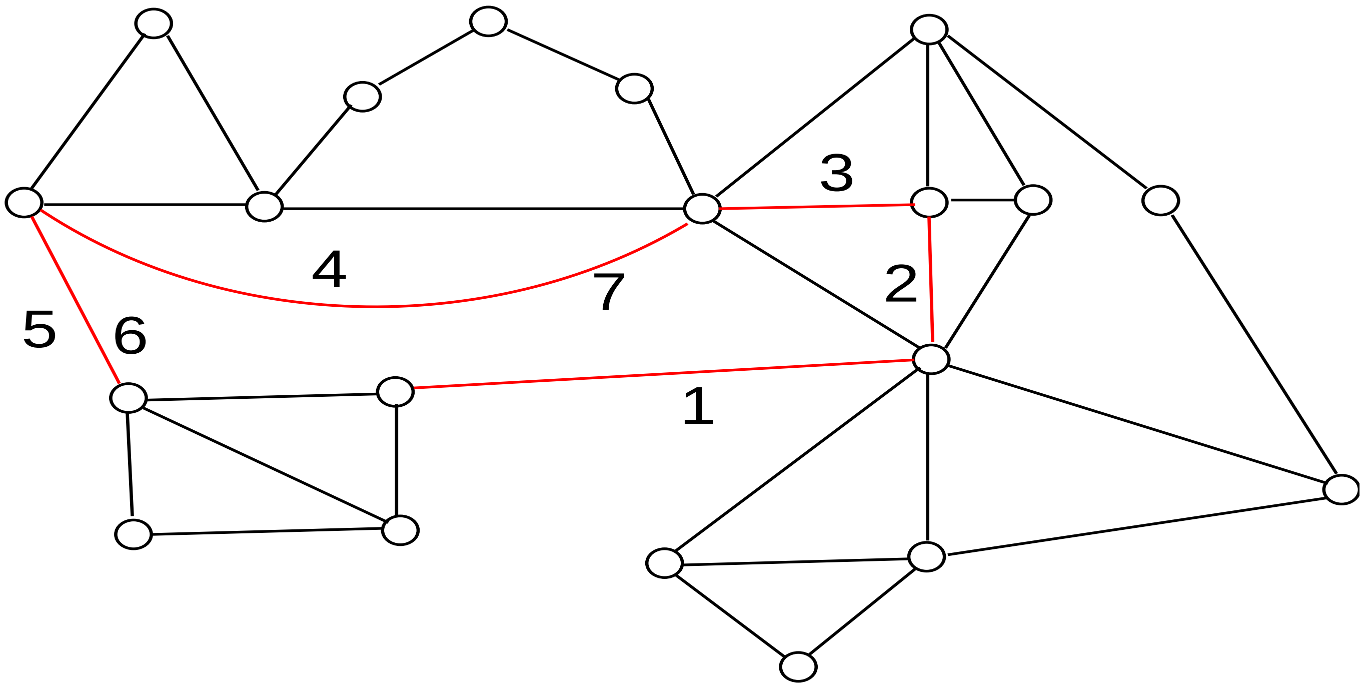
Induzierte Teilgraphen von $G = (V, E)$: $G[V_0]$ durch ihre Knotenmenge $V_0 \subseteq V$ bestimmt



Kantenmenge maximal bzgl. der Inklusion

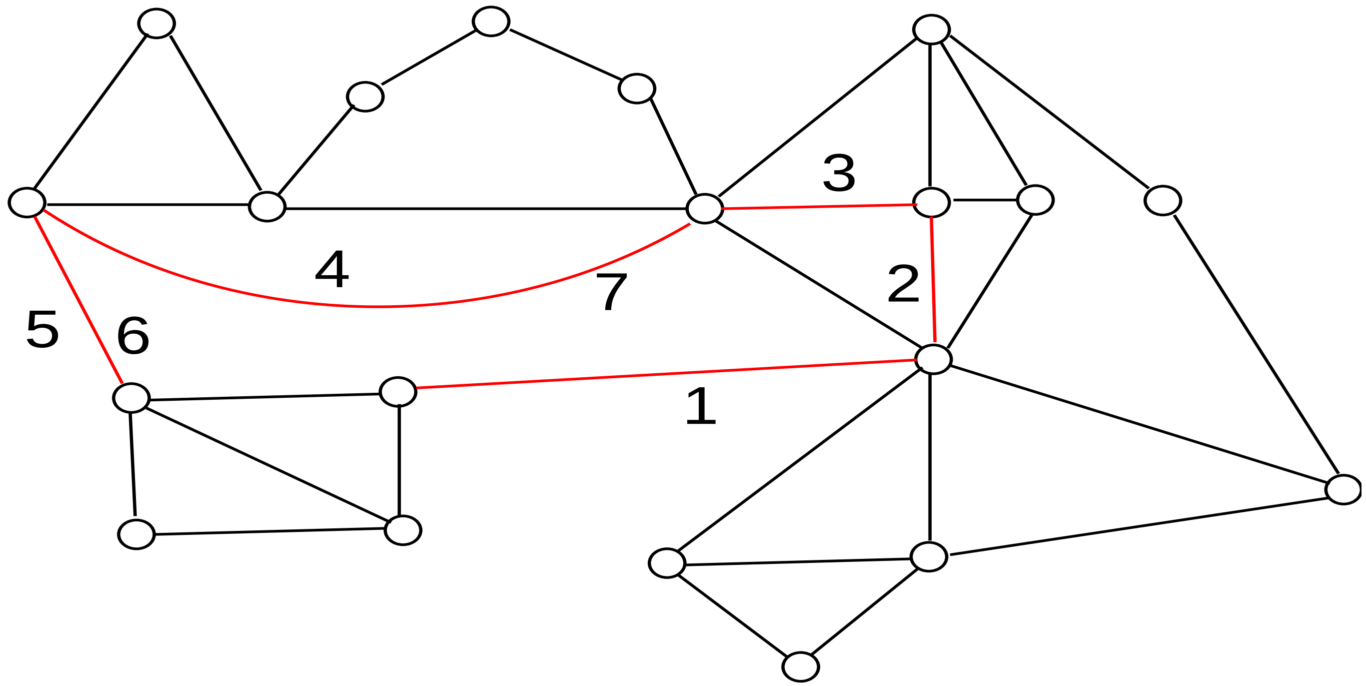
Grundbegriffe der Graphentheorie

Kantenfolgen



Grundbegriffe der Graphentheorie

Kantenfolgen



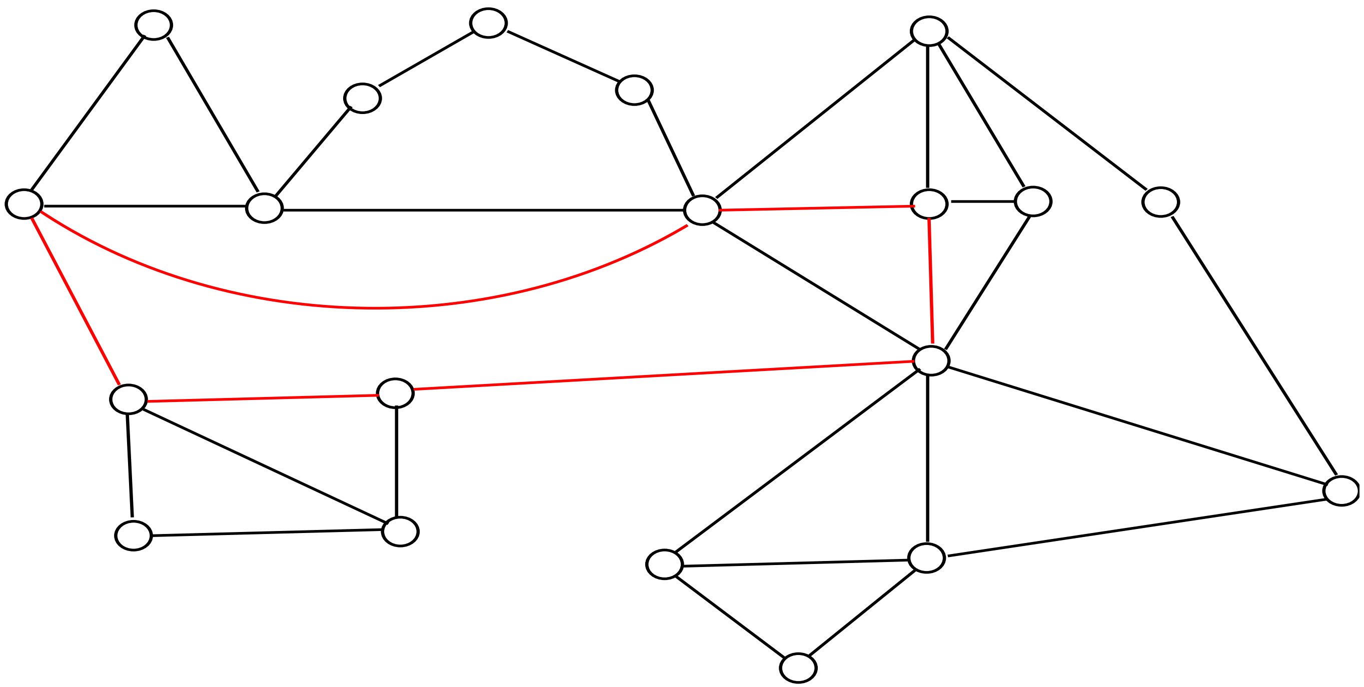
Kantenzug: Kantenfolge, in der keine Kante mehrfach auftritt

Weg: Kantenfolge, in der kein Knoten mehrfach auftritt

Grundbegriffe der Graphentheorie

Spezielle Kantenfolgen: Kreis (in gerichteten Graphen: Zyklus)

. . . ist ein Kantenzug, in dem alle Knoten mit Ausnahme von Anfangs- und Endknoten verschieden sind.



Grundbegriffe der Graphentheorie

Satz *Falls eine Kantenfolge von v nach w existiert, so gibt es auch einen Weg von v nach w.*

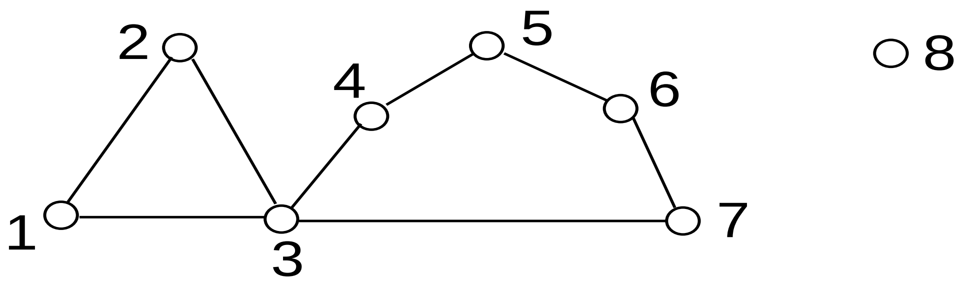
Satz *Falls in einem ungerichteten Graphen 2 verschiedene Wege von v nach w existieren, dann gibt es einen Kreis (positiver Länge).*

Falls in einem gerichteten Graphen eine geschlossene Kantenfolge positiver Länge existiert, dann gibt es einen Zyklus (positiver Länge).

Grundbegriffe der Graphentheorie

Die Adjazenzmatrix von $G = (V, E)$:

$$V = \{v_1 \ldots, v_n\},\ A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \text{ mit } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (v_i, v_j) \in E, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

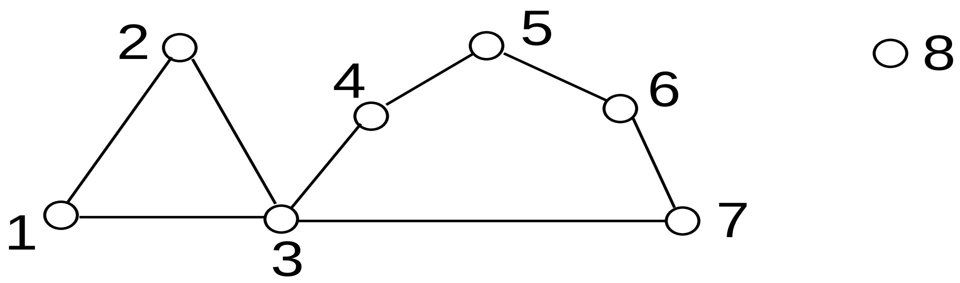


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Grundbegriffe der Graphentheorie

Die Adjazenzmatrix von $G = (V, E)$:

$V = \{v_1 \ldots, v_n\}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ mit $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (v_i, v_j) \in E, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $d(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}$

Grundbegriffe der Graphentheorie

Erreichbarkeitsrelation (ungerichteter Fall): $v \sim w$ genau dann, wenn eine (möglicherweise leere) Kantenfolge von v nach w existiert.

Erreichbarkeitsrelation (gerichteter Fall): $v \sim w$ genau dann, wenn sowohl eine (möglicherweise leere) Kantenfolge von v nach w als auch eine (möglicherweise leere) Kantenfolge von w nach v existiert.

Grundbegriffe der Graphentheorie

Erreichbarkeitsrelation (ungerichteter Fall): $v \sim w$ genau dann, wenn eine (möglicherweise leere) Kantenfolge von v nach w existiert.

Erreichbarkeitsrelation (gerichteter Fall): $v \sim w$ genau dann, wenn sowohl eine (möglicherweise leere) Kantenfolge von v nach w als auch eine (möglicherweise leere) Kantenfolge von w nach v existiert.

Matrix der Erreichbarkeitsrelation (ungerichteter Fall): Sei $|V| = n$ und $|E| = m$.

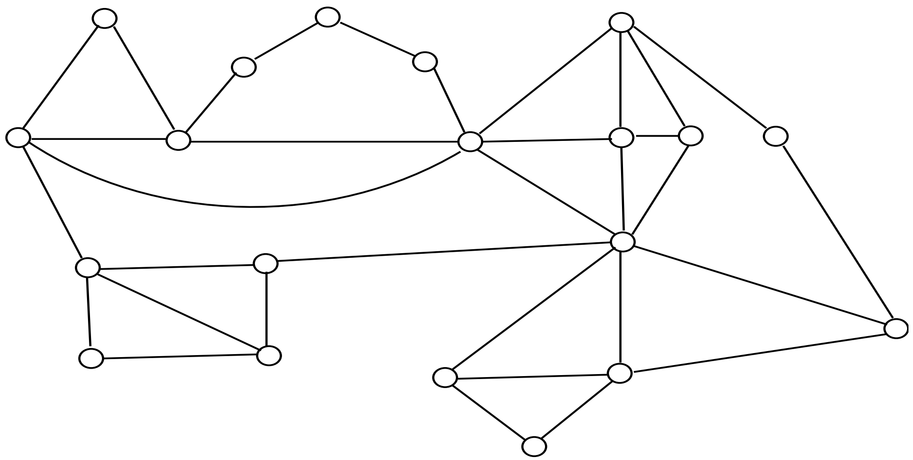
$$M = (m_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}, \text{ wobei } m_{i,j} = \mathrm{sgn}(c_{i,j})$$

und

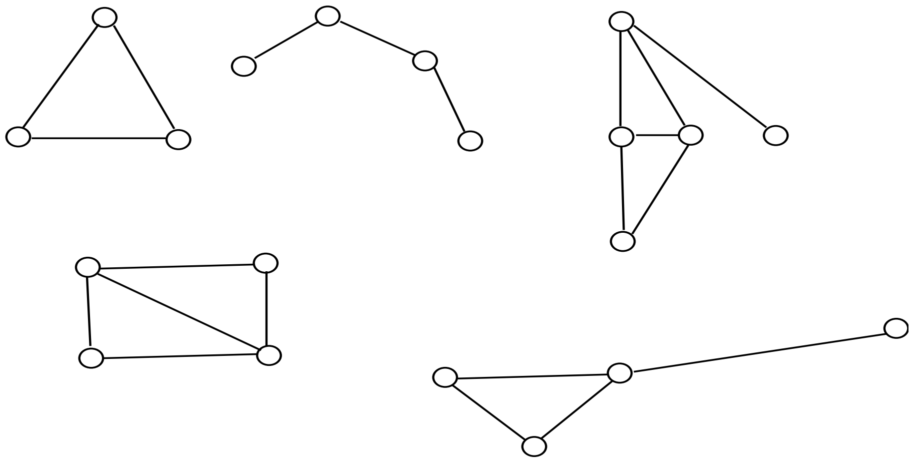
$$C = \sum_{k=0}^{\min(m,n-1)} A^k.$$

Grundbegriffe der Graphentheorie

zusammenhängender Graph

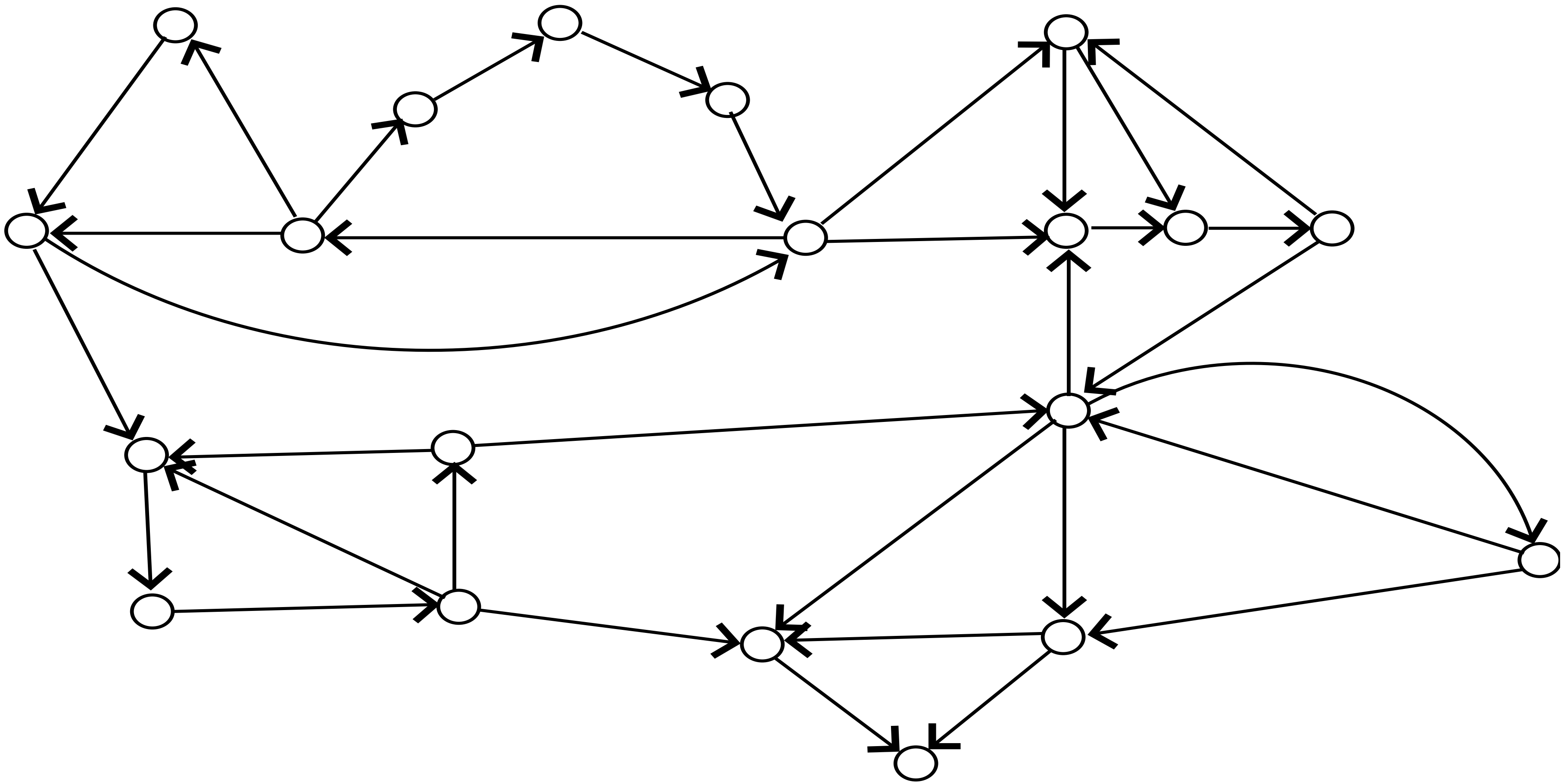


nicht zusammenhängender Graph



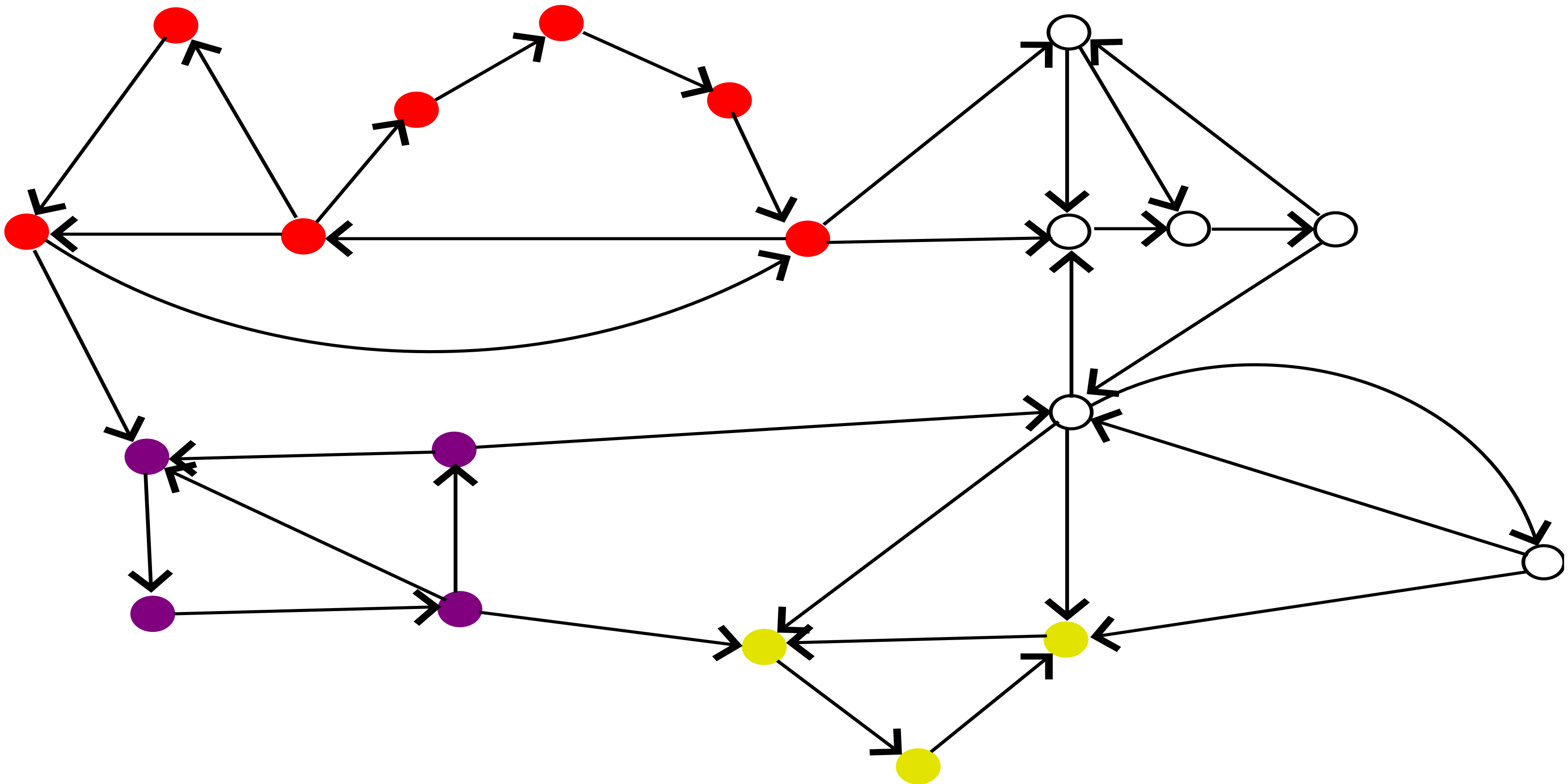
Grundbegriffe der Graphentheorie

Ein schwach, aber nicht stark zusammenhängender Graph



Grundbegriffe der Graphentheorie

Die starken Zusammenhangskomponenten



Grundbegriffe der Graphentheorie

Bäume und Wälder

Ein schlichter ungerichteter Graph, der keine Kreise positiver Länge besitzt, heißt *Wald*.

Ein zusammenhängender Wald heißt *Baum*

Grundbegriffe der Graphentheorie

Bäume und Wälder

Ein schlichter ungerichteter Graph, der keine Kreise positiver Länge besitzt, heißt *Wald*.

Ein zusammenhängender Wald heißt *Baum*

Satz *Für einen Baum* $T = (V, E)$ *gilt: Für je zwei Knoten* $v, w \in V$ *gibt es genau einen Weg* $W(v, w)$*, der* v *und* w *verbindet.*

Die Länge des Weges $W(v, w)$ wird mit $d_T(v, w)$ bezeichnet und heißt *Abstand* zwischen v und w

Grundbegriffe der Graphentheorie

Bäume und Wälder

Ein schlichter ungerichteter Graph, der keine Kreise positiver Länge besitzt, heißt *Wald*.

Ein zusammenhängender Wald heißt *Baum*

Satz *Für einen Baum $T = (V, E)$ gilt: Für je zwei Knoten $v, w \in V$ gibt es genau einen Weg $W(v, w)$, der v und w verbindet.*

Die Länge des Weges $W(v, w)$ wird mit $d_T(v, w)$ bezeichnet und heißt *Abstand* zwischen v und w

Spezielle Klassen von Bäumen: Wurzelbäume, ebene Wurzelbäume, Binärbäume, . . .

Grundbegriffe der Graphentheorie

Ein Knoten v heißt *Endknoten*, wenn $d(v) = 1$.

Satz *Ein Baum mit mindestens zwei Knoten besitzt mindestens zwei Endknoten.*

Grundbegriffe der Graphentheorie

Ein Knoten v heißt *Endknoten*, wenn $d(v) = 1$.

Satz *Ein Baum mit mindestens zwei Knoten besitzt mindestens zwei Endknoten.*

Beweis: Man betrachte einen längsten Weg

$$v - v_1 - v_2 - v_3 - \cdots\cdots - v_k - w.$$

Dann müssen v und w Endknoten sein.

Grundbegriffe der Graphentheorie

Satz *Für einen Baum T gilt $\alpha_0(T) = \alpha_1(T) + 1$.*

Für einen Wald W mit k Zusammenhangskomponenten gilt $\alpha_0(W) = \alpha_1(W) + k$

Beweis: vollständige Induktion nach $n = \alpha_0(T)$.

Induktionsanfang: $\alpha_0(T) = 1$, $\alpha_1(T) = 0$.

Man betrachte einen Baum $T = (V, E)$ mit $n + 1$ Knoten. Dann gibt es einen Endknoten v mit inzidenter Kante e. Sei $T' = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{e\}$.

Wegen $\alpha_0(T') = n$ kann die Induktionsvoraussetzung angewendet werden.