9. Übung Mathematik 2 für MB/VT/WI

81. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y' = y^2$, $y(0) = 1$, mittels Potenzreihenansatz. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Differentialgleichung direkt lösen.

82. Bestimmen Sie die ersten fünf Summanden der Taylorreihe der Lösung des Anfangswertproblems $x^2 - 2xy' = y$, $y(0) = 1$, mittels fortgesetzter Ableitungsbildung. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Differentialgleichung direkt lösen.

83. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungssysteme mit der Eigenwert-Eigenvektormethode:
$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4x + y \\ \dot{y} &= -2x + y, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y \\ \dot{y} &= x - y. \end{aligned}$$

84. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungssysteme mit der Eliminationsmethode:
$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 9y \\ \dot{y} &= 10x + 3y, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= x - y \\ \dot{y} &= x + y. \end{aligned}$$

85. Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ mit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 2 & -7 & -4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des homogenen Systems.

86. Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass
   $$A^n := \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{n-mal} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}.$$
   (b) Berechnen Sie
   $$e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$$
   (c) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$. Was fällt Ihnen auf?

87. (a) Erklären Sie die Begriffe Stabilität und asymptotische Stabilität der Lösung eines Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten.
   (b) Sind die Lösungen der folgenden Differentialgleichungssysteme $\dot{\mathbf{x}}(t) = A_i\mathbf{x}(t)$, $i = 1, 2, 3$ instabil, stabil oder asymptotisch stabil?
   $$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

88. Lösen Sie das Differentialgleichungssystem
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t).$$

89. (a) Was ist eine autonome Differentialgleichung zweiter Ordnung?
   (b) Gegeben ist die autonome Differentialgleichung
   $$x'' = -x.$$
   Skizzieren Sie das Phasenporträt dieser Differentialgleichung und berechnen Sie ihre allgemeine Lösung. (Achtung: Integrationskonstanten nicht vergessen, vgl. Skript!)

90. Bereiten Sie sich gut auf den zweiten Übungstest vor und diskutieren Sie noch offene Fragen mit Ihrer/m ÜbungsleiterIn.

Viel Erfolg für Ihr weiteres Studium!