

9. Übung Mathematik 2 für MB/VT/WI

81. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y' = 2xy$, $y(0) = 1$, mittels Potenzreihenansatz. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Differentialgleichung direkt lösen.
82. Bestimmen Sie die ersten fünf Summanden der Taylorreihe der Lösung des Anfangswertproblems $xy' - 2y = x$, $y(1) = 0$, mittels fortgesetzter Ableitungsbildung. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Differentialgleichung direkt lösen.
83. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungssysteme mit der Eigenwert-Eigenvektormethode:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 6x + y & \dot{x} &= -2x + 4y \\ \dot{y} &= -x + 4y, & \dot{y} &= -2x. \end{aligned}$$

84. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungssysteme mit der Eliminationsmethode:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x + y & \dot{x} &= 5x - y \\ \dot{y} &= -11x - 10y, & \dot{y} &= x + 4y. \end{aligned}$$

85. Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des homogenen Systems.

86. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$A^n := \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n\text{-mal}} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Berechnen Sie

$$e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$$

- (c) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$. Was fällt Ihnen auf?

87. (a) Erklären Sie die Begriffe Stabilität und asymptotische Stabilität der Lösung eines Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten.
- (b) Sind die Lösungen der folgenden Differentialgleichungssysteme $\dot{\mathbf{x}}(t) = A_i\mathbf{x}(t)$, $i = 1, 2, 3$ instabil, stabil oder asymptotisch stabil?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 6 & -13 \end{pmatrix}$$

88. Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t).$$

89. (a) Was ist eine autonome Differentialgleichung zweiter Ordnung?
- (b) Gegeben ist die autonome Differentialgleichung

$$x'' = 2x.$$

Skizzieren Sie das Phasenporträt dieser Differentialgleichung und berechnen Sie ihre allgemeine Lösung. (Achtung: Integrationskonstanten nicht vergessen, vgl. Skript!)

90. Bereiten Sie sich gut auf den zweiten Übungstest vor und diskutieren Sie noch offene Fragen mit Ihrer/m ÜbungsleiterIn.

Viel Erfolg für Ihr weiteres Studium!