8. Übung Mathematik 2 für MB/VT/WI

71. (a) Was berechnet das Oberflächenintegral über einem Vektorfeld (physikalische Deutung)?

 (b) Vom Vektorfeld $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ y \\ 2z \end{pmatrix}$ ist auf der Fläche D, die als jener Teil der Ebene $x + 2y + 2z = 1$ definiert ist, welche im ersten Oktanten liegt, das Oberflächenintegral $\iint\limits_D \boldsymbol{v}\, dO$ zu berechnen.

72. Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\iint\limits_D \boldsymbol{v}\, dO$, wobei $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und D der Würfel ist, der durch die Punkte $(0,0,0)$, $(-1,0,0)$ $(0,-1,0$ und $(0,0,-1)$ aufgespannt wird.

73. Vom Vektorfeld $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4z^3x \\ z \\ y \end{pmatrix}$ ist das Oberflächenintegral $\iint\limits_D \boldsymbol{v}\, dO$ über den von $y = 0$ bis $y = 3$ reichenden Zylinder $x^2 + z^2 = 9$ zu berechnen.

74. Vom Vektorfeld $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} zy \\ z - 2zy \\ -x \end{pmatrix}$ ist über die unterhalb der x-y-Ebene gelegene Halbkugel $D : x^2+y^2+z^2 = 1$ das Oberflächenintegral $\iint\limits_D \boldsymbol{u}\, dO$ zu ermitteln.

75. Skizzieren Sie die durch die Gleichung

$$9x^2 + y^2 = a^2, \qquad a \geq 0$$

gegebene Kurvenschar, geben Sie eine Differentialgleichung an, der diese Kurvenschar genügt (vgl. Skript) und bestätigen Sie die richtige Wahl Ihrer Differentialgleichung

 (a) graphisch, indem Sie die deren Linienfeld betrachen, und

 (b) durch Berechnung ihrer allgemeinen Lösung.

76. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{3y^2 + 2}{6xy - \sin(y)}.$$

 (a) Skizzieren Sie das Linienfeld entlang der Geraden $x = 0$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{\pi}{2}$ und $y = \frac{1}{3}x$ (wo definiert).

 (b) Bringen Sie die Differentialgleichung auf die Gestalt $f + gy' = 0$ und weisen Sie nach, dass diese Differentialgleichung exakt ist.

 (c) Lösen Sie diese exakte Differentialgleichung.

77. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$2y + (3xy + e^{-y})y' = 0,$$

indem Sie einen geeigneten integrierenden Faktor finden.

78. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$x^2 + 3y^2 + 6xyy' = 0.$$

 (a) Weisen Sie nach, dass die Differentialgleichung exakt ist und bestimmen Sie die allgemeine Lösung nach dem Lösungsverfahren für exakte Differentialgleichungen

(b) Transformieren Sie mittels Ansatz $y(x) = x \cdot u(x)$ (also ist $y'(x) = \ldots$) die Differentialgleichung auf eine Differentialgleichung für $u(x)$ und lösen Sie diese mittels Trennung der Variablen. Berechnen Sie schließlich die Lösung für $y(x)$ durch Rücktransformation.

(c) Wie lautet die spezielle Lösung, die dem Anfangswert $y(1) = 0$ genügt?

79. (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung $x'(t) + tx(t) = t(x(t))^3$ durch eine geeignete Transformation (vgl. Skript).

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = (x + y + 1)^2$ durch eine geeignete Transformation (vgl. Skript).

80. (a) Wann ist eine Lösung einer Differentialgleichung stabil und wann asymptotisch stabil?

(b) Skizzieren Sie die Linienfelder der folgenden Differentialgleichungen und bestimmen Sie deren allgemeine Lösung

$$y' = 5y, \qquad y' = \mathrm{e}^{-x}, \qquad y' = \frac{y}{2x}.$$

(c) Überprüfen Sie, welche der Differentialgleichungen aus (b) das Kriterium für (asymptotische) Stabilität jeder Lösung aus dem Skript erfüllt. Bestimmen Sie die stabilen und die asymptotisch stabilen Lösungen der in (b) betrachteten Differentialgleichungen anhand Ihrer Skizzen der Linienfelder.