7. Übung Mathematik 2 für MB/VT/WI

61. Gegeben ist das Vektorfeld $\boldsymbol{v} = \binom{\sin(x)-\lambda y^2}{xy}$

 (a) Fixieren Sie λ reell so, dass $\boldsymbol{v}$ die Integrabilitätsbedingung erfüllt und somit konservativ wird.

 (b) Skizzieren Sie das Vektorfeld an den Punkten $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (\pi/2, 0)$ und $P_3 = (3\pi/2, 1)$.

 (c) Berechnen Sie das Potential des Vektorfeldes.

 (d) Welchen Wert hat das Kurvenintegral $\int_C \boldsymbol{v} d\boldsymbol{x}$, wobei C eine beliebige geschlossene Kurve ist. Warum?

62. (a) Gegeben ist die geschlossene Kurve C im $\mathbb{R}^2$, welche sich aus C_1 und C_2 zusammensetzt, wobei C_1 die obere Hälfte des Kreises mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0,0)$ ist (d.h. jener Teil des Kreises, dessen Punkte positive y–Koordinate haben), und C_2 der Teil der x–Achse ist, der die Punkte $(-2,0)$ und $(2,0)$ verbindet.
 Skizzieren Sie C und geben Sie eine Parametrisierung von C_1 (Hinweis: Polarkoordinaten) und C_2 an. an.

 (b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int_{C_1} \boldsymbol{v} d\boldsymbol{x}$ und $\int_{C_2} \boldsymbol{v} d\boldsymbol{x}$, wobei das Vektorfeld $\boldsymbol{v} = \binom{y}{x}$ ist.

 (c) Ist $\boldsymbol{v}$ ein Gradientenfeld?

63. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C \boldsymbol{v} d\boldsymbol{x}$, wobei C die dreidimensionale Kurve mit Parameterdarstellung

$$x(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \ t \in [-1,1], \text{ ist und } \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ xz \end{pmatrix}.$$

 Ist das Vektorfeld konservativ?

64. (a) Sei $\boldsymbol{v} = \binom{u(x,y)}{v(x,y)}$ ein konservatives Vektorfeld mit Potentialfunktion $F(x,y)$. Sei weiters C eine ebene Kurve, welche die Punkte $P = (x_P, y_P)$ und $Q = (x_Q, y_Q)$ verbindet. Zeigen Sie die Formel

$$\int_C \boldsymbol{v} d\, x = F(x_Q, y_Q) - F(x_P, y_P).$$

 (b) Verwenden Sie die Formel aus (a) um konkret den Wert des Kurvenintegrals $\int_C \boldsymbol{v} d\, x$ zu berechnen, wobei C die Kurve mit Parameterdarstellung

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} t(t^2-1) + \pi^t \\ 17t^{17} + 17 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1,$$

 ist und $\boldsymbol{v}$ jenes konservative Vektorfeld ist, dessen Potentialfunktion $F(x,y) = -y\cos(x)$ ist. Wie lautet das Vektorfeld $\boldsymbol{v}$?

65. (Zentrales Kraftfeld – vgl. Skript) Durch $f(x) = x^2$ wird das zentrale Kraftfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = f(\|\boldsymbol{x}\|)\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$, $\boldsymbol{x} = \binom{x}{y}$, festgelegt.

 (a) Skizzieren Sie das Vektorfeld für alle Punkte $\boldsymbol{x}$ mit $\|\boldsymbol{x}\| = 1/2$, 1, 2 und 7.

 (b) Weisen Sie nach, dass die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist.

 (c) Berechnen Sie die Potentialfunktion des Vektorfeldes.

 (d) Berechnen Sie $\int_1^{\|x\|} f(s) ds$.

66. Skizzieren Sie folgende Flächen im $\mathbb{R}^3$ und geben Sie deren (eventuell stückweise) Parameterdarstellung $\boldsymbol{x}(u,v)$ inklusive jeweiligem Parameterbereich an:

 (a) Kreisscheibe mit Radius 17 und Mittelpunkt $(0,0,0)$ in der x–y–Ebene.

 (b) Teil der Kreisscheibe mit Radius $\sqrt{17}$ in der Ebene $x = 3$ mit Mittelpunkt $(3,0,0)$, der im ersten Oktanten liegt.

(c) $z = x + y$ für $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

(d) $z = x + y$ für $0 \leq x \leq y \leq 1$.

(e) Kegel mit Spitze in $(0, 0, 1)$, dessen Grundflache der Kreis mit Radius 1 in der $x - y$–Ebene liegt.

(f) Quader, aufgespannt durch die drei Geraden, welche den Ursprung mit den Punkten $(17, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 7)$ verbinden.

67. Skizzieren und parametrisieren Sie die Randfläche von folgendem völlig sinnlosen Gegenstand aufgebaut aus einer Kugelscheibe, einem darauf gesetzten Zylinder und einem abschließenden Kegel (Grundfläche ist auch zu parametrisieren!):
Angenommen der Körper stehe im Ursprung, so sei die Kugelscheibe jener Teil der Vollkugel mit Mittelpunkt $(0, 0, 2)$ und Radius 5, welcher zwischen der x–y–Ebene und der Ebene $z = 2$ liegt. An diese Kugelscheibe schließt der Zylinder um die z–Achse mit Radius 5 und Höhe 7 an. Der abschließende Kegel um die z–Achse schließt stetig (also auch mit Radius 5) an den Zylinder an und hat Höhe 3, d.h. seine Spitze befindet sich im Punkt $(0, 0, 12)$.

68. Berechnen Sie das Oberflächenelement dO der im zweiten Beispiel unter (a), (c) und (e) angegebenen Flächen.

69. (a) Begründen Sie anhand der Definition des Oberflächenintegrals über Funktionen aus dem Skript (7.4.1), dass $O(1, F)$, d.h., falls $f \equiv 1$ gewählt wird, die Oberfläche des Flächenstücks F berechnet.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt jenes Teils der Fläche $3x + 2y + z = 6$, der in dem Zylinder $x^2 + y^2 = 4$ liegt.

70. Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_F f dO$ über die Funktion f, wobei $f = f(x, y, z) = z^2$ und F jener Teil des Funktionsgebirges $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist, für welchen $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ gilt.