

6. Übung Mathematik 2 für MB/VT/WI

51. Sei $f(x, y) = x + y$. Berechnen Sie $\int \int_D f(x, y) \, dx dy$, wobei $D = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ direkt anhand der Summen-Definition des Doppelintegrals.

Anleitung: Betrachten Sie die Zerlegung von D in kleine Quadrate der Seitenlänge $\frac{1}{N}$ mit Eckpunkten in den Punkten $(\frac{k}{N}, \frac{j}{N})$, k, j ganze Zahlen zwischen 0 und N . Skizzieren Sie D und die Zerlegung. Berechnen Sie

$$S(N) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N f\left(\frac{k}{N}, \frac{j}{N}\right) \cdot \frac{1}{N^2}.$$

Erklären Sie, was diese Summe berechnet. Berechnen Sie $\lim_{N \rightarrow \infty} S(N)$ und erklären Sie das Ergebnis.

52. Berechnen Sie die folgenden Integrale. Fertigen Sie eine Skizze der jeweiligen Integrationsbereiche an.

$$\int_0^1 \int_x^{x^2} x^2 \, dy dx, \quad \int_0^1 \int_0^y x \sqrt{y^2 - x^2} \, dx dy, \quad \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} 5 \, dy dx.$$

53. Sei B der Bereich in der Ebene begrenzt durch $y = x^2$, $x = 2$ und $y = 1$ und $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- (a) Skizzieren Sie B .
- (b) Berechnen Sie $\int \int_B f(x, y) \, dx dy$.
- (c) Berechnen Sie $\int \int_B f(x, y) \, dy dx$.

54. Skizzieren Sie den Integrationsbereich, vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge und berechnen Sie das Integral:

$$\int_0^2 \int_x^2 2e^{y^2} \, dy dx.$$

55. Skizzieren Sie das Gebiet D , begrenzt von den Geraden $x - y = 0$, $x - y = -5$, $x + y = 2$ und $x + y = 4$. Berechnen Sie das Doppelintegral von $f(x, y) = \frac{e^{x-y}}{x+y}$, indem Sie $x = \frac{1}{2}(u+v)$ und $y = \frac{1}{2}(v-u)$ substituieren. Skizzieren Sie den Integrationsbereich nach der Substitution.

56. Berechnen Sie $\iint_D x^3 y \, dx dy$, wobei D jenen Bereich der Ebene bezeichnet, der von den Geraden $y = x$ und $y = 2x$ und den Hyperbeln $xy = 1$ und $xy = 3$ begrenzt wird (Skizze!).

(Hinweis: Substituieren Sie $x = \frac{u}{v}$, $y = vu$.)

57. (a) Berechnen Sie $\int \int_D 1 \, dx dy$, wobei D der Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 0)$ ist mit Hilfe der Substitution $x = r \cos \phi$ und $y = r \sin \phi$ (Transformation auf Polarkoordinaten). Alle Rechenschritte sind auszuführen.
- (b) Dieses Integral berechnet den Flächeninhalt des Kreises mit Radius 1 – wieso?

58. Berechnen Sie

$$\int \int \int_{x^2+y^2+z^2 \leq 4} 17 \, dx dy dz,$$

indem Sie dieses Integral auf Kugelkoordinaten transformieren. Was berechnet dieses Integral?

59. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der von den drei Koordinatenebenen und den Ebenen $z = x + y$ und $z = 6$ begrenzt wird.
60. Berechnen Sie das Volumen des Bereiches im ersten Oktanten, der von den Flächen $z = x^2 + 2y + 1$ und $z = y + 2$ begrenzt wird, mittels Dreifachintegral.