6. Übung Mathematik 2 für MB/VT/WI

51. Sei $f(x,y) = x + y$. Berechnen Sie $\int\int_D f(x,y)\,dxdy$, wobei $D = \{(x,y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ direkt anhand der Summen–Definition des Doppelintegrals.
Anleitung: Betrachten Sie die Zerlegung von D in kleine Quadrate der Seitenlänge $\frac{1}{N}$ mit Eckpunkten in den Punkten $(\frac{k}{N}, \frac{j}{N})$, k, j ganze Zahlen zwischen 0 und N. Skizzieren Sie D und die Zerlegung. Berechnen Sie
$$S(N) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} f(\frac{k}{N}, \frac{j}{N}) \cdot \frac{1}{N^2}.$$
Erklären Sie, was diese Summe berechnet. Berechnen Sie $\lim_{N\to\infty} S(N)$ und erklären Sie das Ergebnis.

52. Berechnen Sie die folgenden Integrale. Fertigen Sie eine Skizze der jeweiligen Integrationsbereiche an.
$$\int_0^1\int_x^{x^2} 2x\,dydx, \qquad \int_0^1\int_0^x y\sqrt{x^2-y^2}\,dydx, \qquad \int_0^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} 4\,dydx.$$

53. Sei B der Bereich in des positiven Quadranten begrenzt durch $x = y^2$, $x = 2$ und $y = 1$ und $f(x,y) = x^2+y^2$.
    (a) Skizzieren Sie B.
    (b) Berechnen Sie $\int\int_B f(x,y)\,dxdy$.
    (c) Berechnen Sie $\int\int_B f(x,y)\,dydx$.

54. Skizzieren Sie den Integrationsbereich, vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge und berechnen Sie das Integral:
$$\int_{-2}^{0}\int_{-x}^{2} 2\mathrm{e}^{y^2}\,dydx.$$

55. Skizzieren Sie das Gebiet D, begrenzt von den Geraden $x - y = -1$, $x - y = 4$, $x + y = 1$ und $x + y = 5$. Berechnen Sie das Doppelintegral von $f(x,y) = \frac{e^{x-y}}{x+y}$, indem Sie $x = \frac{1}{2}(u+v)$ und $y = \frac{1}{2}(v-u)$ substituieren. Skizzieren Sie den Integrationsbereich nach der Substitution.

56. Berechnen Sie $\displaystyle\iint_D x^3y\,dxdy$, wobei D jenen Bereich der Ebene bezeichnet, der von den Geraden $y = x$ und $y = 4x$ und den Hyperbeln $xy = 1$ und $xy = 9$ begrenzt wird (Skizze!).
(*Hinweis:* Substituieren Sie $x = \dfrac{u}{v}$, $y = vu$.)

57. (a) Berechnen Sie $\int\int_D 1\,dxdy$, wobei D der Kreisring mit Mittelpunkt $(0,0)$ ist, der von einem Kreis mit Radius 1 und einem Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ begrenzt wird, mit Hilfe der Substitution $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$ (Transformation auf Polarkoordinaten). Alle Rechenschritte sind auszuführen.
    (b) Was berechnet dieses Integral?

58. Erklären Sie die Transformation auf Kugelkoordinaten und berechnen Sie damit
$$\int\int\int_{x^2+y^2+z^2\leq\pi^2} 1\,dxdydz.$$

59. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der von den drei Koordinatenebenen und den Ebenen $6 = x+y+z$ und $z = 3$ begrenzt wird.

60. Berechnen Sie das Volumen des Bereiches im ersten Oktanten, der von den Flächen $z = x^2 + 2y + 1$ und $z = y + 2$ begrenzt wird, mittels Dreifachintegral.