5. Übung Mathematik 2 für MB/VT/WI

41. Sei $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$.

    (a) Skizzieren Sie die Höhenschichtlinie $f(x, y) = 1$.

    (b) Skizzieren Sie die Kurve $z = f(\sqrt{\pi}/4, y)$, d.h. die Schnittkurve des Funktionsgebirges mit der Ebene $x = \sqrt{\pi}/4$.

    (c) Berechnen Sie den Gradienten von $f(x, y)$.

    (d) Berechnen Sie die Richtungsableitung von $f(x, y)$ im Punkt $(a, b) \neq (0, 0)$ in eine allgemeine Richung $\boldsymbol{e}$. Was berechnet die Richungsableitung?

    (e) Berechnen Sie die Richtungsableitung im Punkt $(a, b) \neq (0, 0)$ in Richtung des Nullpunkts.

42. Sei $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$. Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x, y)$ im Punkt $P = (1, 2)$. Lesen Sie aus dieser Taylorformel die Gleichung für die Tangentialebene im Punkt P ab. Geben Sie den Normalvektor dieser Tangentialebene an. Von welcher Art ist der Punkt P (elliptisch, hyperbolisch bzw. parabolisch)?

43. (a) Erklären Sie den Begriff *lokales Extremum.*

    (b) Berechnen Sie (unter Verwendung des Leibniz–Kriteriums für innere Extrema) die lokalen Extrema folgender Funktionen

$$f(x, y) = 4x^2 - 4xy + 2y^2 + 10x - 6y, \qquad g(x, y) = x^2 y + \sin(xy).$$

44. Sei $f(x, y) = (x^2 + y^2)/5$. Berechnen Sie alle lokalen Extrema über dem Viereck V begrenzt durch die Geraden $4x + 3y = 24$ und $x + 3y = 15$. Beachten Sie speziell die Randextrema. Welche Ihrer Extrema sind Minima bzw. Maxima?

45. Sei $f(x, y) = x^2 - 2(y + 1)^2$. Bestimmen Sie mithilfe Lagrange'scher Multiplikatoren die Extrema auf der Ellipse $x^2 + 4y^2 = 1$. (Hier ist nicht zu überprüfen, ob die berechneten Punkte Minima bzw. Maxima sind.)

46. Berechnen Sie unter Verwendung der Lagrange-Multiplikatoren den minimalen Abstand des Punktes $P = (2, 3)$ zu der Geraden $y = 2x - 4$.

47. Finden Sie mit Hilfe der Lagrange–Multiplikatoren jene Punkte auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 80$ die minimalen und maximalen Abstand zum Punkt $P = (1, 2)$ haben.

48. Sei $f(x, y) = x^2 - y^2/9 + r^2$ eine Funktion, $r > 0$ reell konstant.

    (a) Wie sehen die Höhenschichtlinien dieser Funktion aus, im Speziellen die Höhenschichtlinie $f(x, y) = 0$?

    (b) Bestätigen Sie, dass im Punkt $P = (0, 3r)$ die Voraussetzungen des Hauptsatzes über implizite Funktionen erfüllt sind.

    (c) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $g(x)$ um 0, welche in der Formulierung des Hauptsatzes über implizite Funktionen im Skriptum vorkommt.

    (d) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $h(x) = 3\sqrt{r^2 + x^2}$ im Punkt $x = 0$. Was fällt Ihnen auf? Warum?

49. Eine Begründung der Methode der Extremwertbestimmung mit Lagrange'schen Multiplikatoren anhand des Satzes über implizite Funktionen: Gegeben sei ein (stetig differenzierbares) Funktionsgebirge $f(x, y)$ und eine Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ auf einem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$. Weiters sei $g_y(x, y) \neq 0$ und $f_y(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in D$.

    (a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $f_x g_y - f_y g_x = 0$ erfüllt ist, wenn $f(x, y)$ ein Extremum unter der Nebenbedingung $g(x, y)$ hat.
    Anleitung: Führen Sie folgende Schritte aus:

       i. Wiederholen Sie, dass der Satz über implizite Funktionen auf $g(x, y) = 0$ angewandt die Existenz einer Funktion $y(x)$ mit $g(x, y(x)) = 0$ garantiert.

ii. Bestimmen Sie (für das $y(x)$ aus i.) die Ableitungen der (nur von x abhängigen) Funktionen $F(x) = f(x, y(x))$ und $G(x) = g(x, y(x))$ (Kettenregel!) und begründen Sie, warum beide im Falle eines Extremums von $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ gleich 0 sein müssen, d.h. $F'(x) = 0$ und $G'(x) = 0$.

iii. Bringen Sie die beiden Gleichungen $F'(x) = 0$ und $G'(x) = 0$ jeweils auf die Gestalt $y'(x) = \ldots$ und weisen Sie durch Gleichsetzen dieser Gleichungen $f_x g_y - f_y g_x = 0$ nach.

(b) Zeigen Sie, dass für die Funktion $\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ aus $\Phi_x = \Phi_y = 0$ (vgl. Methode der Lagrange–Multiplikatoren) die Bedingung $f_x g_y - f_y g_x = 0$ folgt, welche nach (a) für die Existenz eines Extremums notwendig ist.
Anleitung: λ aus $\Phi_x = \Phi_y = 0$ eliminieren.

50. Berechnen Sie bei folgenden Funktionenpaaren u, v die Funktionaldeterminanten und geben Sie Gebiete an, wo die Funktionen nach dem Hauptsatz über inverse Funktionen lokal invertierbar sind.

$$\begin{array}{c} u(x,y) = xe^y \\ v(x,y) = xe^{-2y} \end{array}, \qquad \begin{array}{c} u(x,y) = e^x \\ v(x,y) = \ln(y) \end{array}, \qquad \begin{array}{c} u(x,y) = x^2 \\ v(x,y) = 1/y^2 \end{array}.$$