

## 5. Übung Mathematik 2 für MB/VT/WI

41. Sei  $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ .
- Skizzieren Sie die Höhenschichtlinie  $f(x, y) = 0$ .
  - Skizzieren Sie die Kurve  $z = f(\sqrt{\pi}/4, y)$ , d.h. die Schnittkurve des Funktionsgebirges mit der Ebene  $x = \sqrt{\pi}/4$ .
  - Berechnen Sie den Gradienten von  $f(x, y)$ .
  - Berechnen Sie die Richtungsableitung von  $f(x, y)$  im Punkt  $(a, b) \neq (0, 0)$  in eine allgemeine Richtung  $e$ . Was berechnet die Richtungsableitung?
  - Berechnen Sie die Richtungsableitung im Punkt  $(a, b) \neq (0, 0)$  in Richtung des Nullpunkts.
42. Sei  $f(x, y) = e^x y + xy^2 + 3x - 4$ . Berechnen Sie die Taylorreihe von  $f(x, y)$  im Punkt  $P = (0, 1)$ . Lesen Sie aus dieser Taylorformel die Gleichung für die Tangentialebene im Punkt  $P$  ab. Geben Sie den Normalvektor dieser Tangentialebene an. Von welcher Art ist der Punkt  $P$  (elliptisch, hyperbolisch bzw. parabolisch)?
43. (a) Berechnen Sie (unter Verwendung des Leibniz-Kriteriums für innere Extrema) die lokalen Extrema folgender Funktion
- $$f(x, y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y.$$
- (b) Finden Sie 3 positive Zahlen  $x, y, z$  deren Summe 10 ist und sodass  $x^2 y^2 z$  ein Maximum ist.
44. Sei  $f(x, y) = (2x + y)e^{-x^2 - y^2}$ . Berechnen Sie alle lokalen Extrema über dem Gebiet beschränkt durch die Geraden  $y = 2$ ,  $y = x$  und  $y = -x$ . Beachten Sie speziell die Randextrema. Welche Ihrer Extrema sind lokale Minima bzw. Maxima?
45. Sei  $f(x, y) = xy - x^2$ . Berechnen Sie alle lokalen Extrema über dem Dreieck  $D$  begrenzt durch die Geraden  $x = 1$ ,  $y = 0$  und  $x = y$ . Beachten Sie speziell die Randextrema. Welche Ihrer Extrema sind Minima bzw. Maxima?
46. Sei  $f(x, y) = x^2 - xy/2 + y^2/4 - x$ . Bestimmen Sie mithilfe Lagrange'scher Multiplikatoren die Extrema auf der Ellipse  $x^2 + y^2/4 = 1$ . (Hier ist nicht zu überprüfen, ob die berechneten Punkte Minima bzw. Maxima sind.)
47. Finden Sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren jene Punkte auf dem Kreis  $x^2 + y^2 = 100$  die minimalen und maximalen Abstand zum Punkt  $P = (2, 3)$  haben.
48. Sei  $f(x, y) = x^2/4 + y^2/9 - r^2$  eine Funktion,  $r > 0$  reell konstant.
- Wie sehen die Höhenschichtlinien dieser Funktion aus, im Speziellen die Höhenschichtlinie  $f(x, y) = 0$ ?
  - Bestätigen Sie, dass im Punkt  $P = (0, 3r)$  die Voraussetzungen des Hauptsatzes über implizite Funktionen erfüllt sind.
  - Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion  $g(x)$  um 0, welche in der Formulierung des Hauptsatzes über implizite Funktionen im Skriptum vorkommt.
  - Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion  $h(x) = 3\sqrt{r^2 - x^2/4}$  im Punkt  $x = 0$ . Was fällt Ihnen auf? Warum?
49. Eine Begründung der Methode der Extremwertbestimmung mit Lagrange'schen Multiplikatoren anhand des Satzes über implizite Funktionen: Gegeben sei ein (stetig differenzierbares) Funktionsgebirge  $f(x, y)$  und eine Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  auf einem Definitionsbereich  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Weiters sei  $g_y(x, y) \neq 0$  und  $f_y(x, y) \neq 0$  für alle  $(x, y) \in D$ .
- Zeigen Sie, dass die Gleichung  $f_x g_y - f_y g_x = 0$  erfüllt ist, wenn  $f(x, y)$  ein Extremum unter der Nebenbedingung  $g(x, y)$  hat.  
Anleitung: Führen Sie folgende Schritte aus:

- i. Wiederholen Sie, dass der Satz über implizite Funktionen auf  $g(x, y) = 0$  angewandt die Existenz einer Funktion  $y(x)$  mit  $g(x, y(x)) = 0$  garantiert.
  - ii. Bestimmen Sie (für das  $y(x)$  aus i.) die Ableitungen der (nur von  $x$  abhängigen) Funktionen  $F(x) = f(x, y(x))$  und  $G(x) = g(x, y(x))$  (Kettenregel!) und begründen Sie, warum beide im Falle eines Extremums von  $f(x, y)$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  gleich 0 sein müssen, d.h.  $F'(x) = 0$  und  $G'(x) = 0$ .
  - iii. Bringen Sie die beiden Gleichungen  $F'(x) = 0$  und  $G'(x) = 0$  jeweils auf die Gestalt  $y'(x) = \dots$  und weisen Sie durch Gleichsetzen dieser Gleichungen  $f_x g_y - f_y g_x = 0$  nach.
- (b) Zeigen Sie, dass für die Funktion  $\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$  aus  $\Phi_x = \Phi_y = 0$  (vgl. Methode der Lagrange-Multiplikatoren) die Bedingung  $f_x g_y - f_y g_x = 0$  folgt, welche nach (a) für die Existenz eines Extremums notwendig ist.  
Anleitung:  $\lambda$  aus  $\Phi_x = \Phi_y = 0$  eliminieren.

50. Berechnen Sie bei folgenden Funktionenpaaren  $u, v$  die Funktionaldeterminanten und geben Sie Gebiete an, wo die Funktionen nach dem Hauptsatz über inverse Funktionen lokal invertierbar sind.

$$\begin{array}{ccc} u(x, y) = x^2 - y^2 & u(x, y) = xy & u(x, y) = x \\ v(x, y) = 2xy & v(x, y) = xe^y & v(x, y) = x^2/y \end{array} .$$