

3. Übung Mathematik 2 für MB/VT/WI

Zur Erinnerung: Bitte nur Beispiele kreuzen, welche vollständig gelöst sind und an der Tafel ohne Unterlagen vorgerechnet werden können!

21. Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

direkt, d.h. durch Entwicklung nach einer Zeile/Spalte Ihrer Wahl ohne vorherige Umformung.

22. Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) indem Sie nach der 1. Zeile entwickeln, NACHDEM Sie A durch Addition/Subtraktion von (Vielfachen von) Zeilen so umgeformt haben, sodass in der 1. Zeile nur noch ein Eintrag ungleich 0 ist.
- (b) indem Sie A durch Addition/Subtraktion von (Vielfachen von) Zeilen auf Diagonalgestalt gebracht haben.
23. (a) Argumentieren Sie mit den Rechenregeln für Determinanten, dass die Spaltenvektoren einer Matrix A genau dann linear abhängig sind, wenn $\text{Det}(A) = 0$.
- (b) Zeigen Sie, dass die Determinante der $n \times n$ Matrix mit Elementen a_1, \dots, a_n in der Nebendiagonale und 0 über der Nebendiagonale, d.h. von

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & * \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & * & * \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & & & & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & * & * & \dots & * \\ a_n & * & * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

stets $(-1)^{n(n-1)/2} a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ ist. Hier steht $*$ für beliebige reelle Zahlen.

- (c) Berechnen Sie (mittels Determinantenrechnung) die Fläche des Dreiecks welches von den drei Punkten in der am Ende des Übungsblattes eingefügten Grafik aufgespannt wird.
24. Berechnen Sie die Inverse A^{-1} der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

mit der auf Determinanten beruhenden Formel (Skript Seite 24) und machen Sie die Probe für Ihr Ergebnis.

Berechnen Sie $\left| \left((2A)^T \right)^{-1} \right|$.

25. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-4y \\ x^2 \end{pmatrix}$

- (b) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto ax - b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ fest gewählt
- (c) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto cx$ für $c \in \mathbb{R}$ fest gewählt
- (d) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- (e) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y)^T \mapsto (x + y, x - y, y - x)^T$

Falls linear, geben Sie die Darstellung als Matrix an.

26. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

- (a) $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z)^T \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- (b) $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$
- (c) $C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $f(x) \mapsto F(x) = \int_0^x f(t) dt$
- (d) $C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \mapsto \int_0^1 f(x) dx$

27. Geben Sie die Matrix A einer Lineartransformation \mathbf{l} an, die Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ an der y - z -Ebene spiegelt, in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ um den Faktor 3 streckt, und den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ am Ursprung spiegelt.

Machen Sie die Probe für Ihr Ergebnis.

Anleitung: Sei B die Matrix deren Spaltenvektoren die gegebenen Vektoren sind und B' jene Matrix, deren Spaltenvektoren die Bilder der gegebenen Vektoren sind. Überlegen Sie sich, warum die Matrix A die Matrixgleichung $A \cdot B = B'$ erfüllt und berechnen Sie A aus dieser Gleichung.

28. (a) Argumentieren Sie geometrisch, dass die Abbildung \mathbf{s} , welche jeden Punkt des \mathbb{R}^2 an der Gerade $y = -2x$ spiegelt, linear ist.

- (b) Berechnen Sie die Matrix S dieser linearen Abbildung \mathbf{s} , indem Sie folgendermaßen vorgehen:
Wählen Sie zwei verschiedene Punkte im \mathbb{R}^2 und ihr Bild nach der Spiegelung. Anschließend berechnen Sie analog zu Beispiel 27. die Matrix S .
Machen Sie die Probe für Ihr Ergebnis, indem Sie das Ergebnis der Spiegelung eines dritten Punktes mit Ihrer Matrix S berechnen.

29. (a) Geben Sie jene Matrix an, welche der linearen Abbildung π , der Projektion des \mathbb{R}^3 auf die y - z -Ebene, entspricht.

- (b) Wie lautet die Matrix M , die jener Abbildung vom \mathbb{R}^3 in den \mathbb{R}^2 entspricht, welche einen Vektor $(x, y, z)^T$ zunächst unter \mathbf{l} aus Beispiel 27 abbildet, anschließend in die x - z -Ebene projiziert und schließlich in der y - z -Ebene an der Gerade $y = -2x$ spiegelt (vgl Bsp. 28)? D.h., gesucht ist jene Matrix, welche der linearen Abbildung $\mathbf{s} \circ \pi \circ \mathbf{l}$ entspricht.

Anmerkung: Zur Lösung dieses Beispiels sind die Matrizen A und S aus den Beispielen 27 und 28 erforderlich.

30. Sei \mathbf{a} ein Vektor mit Länge 1 im \mathbb{R}^3 . Sei weiters $\mathbf{l} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Abbildung definiert durch $\mathbf{l}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}$.

- (a) Zeigen Sie, dass \mathbf{l} linear ist.
- (b) Geben Sie die Matrix zu \mathbf{l} an.
- (c) Interpretieren Sie \mathbf{l} geometrisch.

