3. Übung Mathematik 2 für MB/VT/WI

21. Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

direkt, d.h. durch Entwicklung nach einer Zeile/Spalte Ihrer Wahl ohne vorherige Umformung.

22. Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) indem Sie nach der 3. Zeile entwickeln, NACHDEM Sie A durch Addition/Subtraktion von (Vielfachen von) Zeilen so umgeformt haben, sodass in der 3. Zeile nur noch ein Eintrag ungleich 0 ist.

(b) indem Sie A durch durch Addition/Subtraktion von (Vielfachen von) Zeilen auf Diagonalgestalt gebracht haben.

23. (a) Argumentieren Sie mit den Rechenreglen für Determinanten, dass die Spaltenvektoren eine Matrix A genau dann linear abhängig sind, wenn $Det(A) = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass die Determinante der $n \times n$ Matix mit Elementen $a_1, \dots, a_n$ in der Nebendiagonale und 0 über der Nebendiagonale, d.h. von

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & * \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & * & * \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & & & & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & * & * & \dots & * \\ a_n & * & * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

stets $(-1)^{n(n-1)/2} a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ ist. Hier steht $*$ für beliebige reelle Zahlen.

(c) Berechnen Sie (mittels Determinantenrechnung) die Fläche des Dreiecks mit Eckpunkten $(1, -1)$, $(2, 3)$ und $(-1, 2)$.

24. Berechnen Sie die Inverse A^{-1} der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

mit der auf Determinanten beruhenden Formel (Skript Seite 24) und machen Sie die Probe für Ihr Ergebnis.

Berechnen Sie $\left| \left(\left(\left(\frac{1}{2} A \right)^T \right)^{-1} \right)^2 \right|$.

25. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \binom{x}{y} \mapsto \binom{3x+4y}{y}$

(b) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ fest gewählt

(c) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \binom{x}{y} \mapsto \binom{1}{2} \cdot \binom{x}{y}$

(d) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z)^T \mapsto (x+y, y+z)^T$

Falls linear, geben Sie die Darstellung als Matrix an.

26. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z)^T \mapsto \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(b) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \overline{z}$

(c) $C[0,1] \to C[0,1], \quad f(x) \mapsto F(x) = \int_0^x f(t)dt$

(d) $C[0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) \mapsto \int_0^1 f(x)dx$

27. Geben Sie die Matrix A einer Lineartransformation $\boldsymbol{l}$ an, die Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an der x–y–Ebene spiegelt, in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ um den Faktor 2 streckt, und den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ am Ursprung spiegelt.
Machen Sie die Probe für Ihr Ergebnis.
Anleitung: Sei B die Matrix deren Spaltenvektoren die gegebenen Vektoren sind und B' jene Matix, deren Spaltenvektoren die Bilder der gegebenen Vektoren sind. Überlegen Sie sich, warum die Matix A die Matrixgleichung $A \cdot B = B'$ erfüllt und berechnen Sie A aus dieser Gleichung.

28. (a) Argumentieren Sie geometrisch, dass die Abbildung $\boldsymbol{s}$, welche jeden Punkt des $\mathbb{R}^2$ an der Gerade $y = 2x$ spiegelt, linear ist.

(b) Berechnen Sie die Matrix S dieser linearen Abbildung $\boldsymbol{s}$, indem Sie folgendermaßen vorgehen:
Wählen Sie zwei verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^2$ und ihr Bild nach der Spiegelung. Anschließend berechnen Sie analog zu Beispiel 27. die Matrix S.
Machen Sie die Probe für Ihr Ergebnis, indem Sie das Ergebnis der Spiegelung eines dritten Punktes mit Ihrer Matrix S berechnen.

29. (a) Geben Sie jene Matrix an, welche der linearen Abbildung π, der Projektion des $\mathbb{R}^3$ auf die x–y–Ebene, entspricht.

(b) Wie lautet die Matrix M, die jener Abbildung vom $\mathbb{R}^3$ in den $\mathbb{R}^2$ entspricht, welche einen Vektor $(x,y,z)^T$ zunächst unter $\boldsymbol{l}$ aus Beispiel 27 abbildet, anschließend in die x–y–Ebene projiziert und schließlich in der x–y–Ebene an der Gerade $y = 2x$ spiegelt (vgl Bsp. 28)? D.h., gesucht ist jene Matrix, welche der linearen Abbildung $\boldsymbol{s} \circ \pi \circ \boldsymbol{l}$ entspricht.
Anmerkung: Zur Lösung dieses Beispiels sind die Matrizen A und S aus den Beispielen 27 und 28 erforderlich.

30. Sei $\boldsymbol{a}$ ein Vektor mit Länge 1 im $\mathbb{R}^3$. Sei weiters $\boldsymbol{l} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Abbildung definiert durch $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{l}$ linear ist.

(b) Geben Sie die Matrix zu $\boldsymbol{l}$ an.

(c) Interpretieren Sie $\boldsymbol{l}$ geometrisch.