

## 2. Übung Mathematik 2 für MB/VT/WI

11. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine (allgemeine)  $(2 \times 2)$ -Matrix, welche  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ , für jeden Vektor  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  ungleich  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  des  $\mathbb{R}^2$  erfüllt (Anmerkung: diese Eigenschaft nennt man positiv definit).

(a) Welche Eigenschaft muss  $A$  noch erfüllen, damit das Produkt  $\cdot_A$ , welches via  $\mathbf{x} \cdot_A \mathbf{y} = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$  definiert wird, ein inneres Produkt auf  $\mathbb{R}^2$  wird? Was ist überhaupt ein inneres Produkt?

Anleitung: Rechnen Sie die drei definierenden Eigenschaften des inneren Produkts aus dem Skriptum nach (vgl. 5.1.2).

(b) Geben Sie ein konkretes Beispiel einer solchen Matrix  $A$  an und berechnen Sie  $\mathbf{x} \cdot_A \mathbf{y}$  aus (a) für konkrete Vektoren  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$ .

(c) Wie muss die Matrix  $A$  aussehen, damit  $\mathbf{x} \cdot_A \mathbf{y}$  aus (a) das übliche innere Produkt wird?

12. (a)  $C[a, b]$  bezeichne den Vektorraum aller auf  $[a, b]$  stetigen Funktionen. Weisen Sie nach, dass durch

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

ein inneres Produkt auf  $C[a, b]$  gegeben ist.

(b) Es sei speziell  $[a, b] = [-\pi, \pi]$ ,  $f_n(x) = \sin(nx)$  und  $g_n = \cos(nx)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Bestimmen Sie jeweils das innere Produkt  $\langle f_i, f_k \rangle$  für  $i \neq k$ ,  $\langle f_i, f_i \rangle$  und  $\langle f_i, g_i \rangle$ .

(c) Berechnen Sie den Winkel  $\phi$  zwischen  $h(x) = x$  und  $f(x) = \cos(x)$  bezüglich des inneren Produkts aus (b).

13. Zeigen Sie:  $k$  paarweise orthogonale Elementen  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$  (nicht notwendigerweise die Standardbasisvektoren!) in einem (mindestens  $k$ -dimensionalen) Vektorraum sind linear unabhängig. Erklären Sie diese Aussage speziell für  $k = 2$  anhand eines Beispiels.

Anleitung: In die Definition der linearen Unabhängigkeit einsetzen, die auftretende Gleichung mit  $\mathbf{u}_k$  multiplizieren ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) und die Orthogonalität ausnützen.

14. (Orthogonalisierungsverfahren von E.Schmidt)

Es sei  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  eine Basis eines  $n$ -dimensionalen Vektorraumes  $V$ . Zeigen Sie, dass die im folgenden definierten Vektoren  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  eine Orthonormalbasis von  $V$  bilden!

(i)  $\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|}$

(ii) für  $k = 2, \dots, n$  sei

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{b}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \mathbf{b}_k, \mathbf{a}_i \rangle \mathbf{a}_i$$

und

$$\mathbf{a}_k = \frac{\mathbf{d}_k}{\|\mathbf{d}_k\|}.$$

15. Wenden Sie das im Beispiel 14 beschriebene Orthogonalisierungsverfahren an, um eine Orthonormalbasis des Vektorraumes

$$V = \{\lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \lambda_3 \mathbf{b}_3 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$$

mit

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen.

16. (a) Weisen Sie nach, dass die Menge aller Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a & d & b \\ d & a & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad \text{für } a, b, c, d \text{ reell}$$

einen Vektorraum bilden. Geben Sie eine Basis für diesen Vektorraum an. Welche Dimension hat dieser Vektorraum?

- (b) Warum bildet die Menge aller Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & a & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad \text{für } a, b, c, \text{ reell}$$

keinen Vektorraum?

17. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

- (a)  $A + B$  und  $B + A$ .  
(b)  $AB$  und  $BA$ . Was fällt Ihnen auf?  
(c)  $AC$ . Fasst man die Spalten der Matrix  $A$  als Vektoren auf, so entspricht  $AC$  einer Summe von Vielfachen dieser Spaltenvektoren - welcher? Geben Sie eine geometrische Interpretation an.  
(d)  $D^2$  und  $D^3$ . Was fällt Ihnen hier auf?
18. (a) Berechnen Sie von folgenden Matrizen jeweils den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ -1 & -10 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad D = (0, 0, 0).$$

- (b) Geben Sie die  $(3 \times 3)$ -Elementarmatrizen  $T$  folgender Umformungen an und bestätigen Sie die Richtigkeit Ihrer Elementarmatrix, indem Sie die Matrix  $A' = A.T$  jeweils berechnen, wobei  $A$  aus (a) ist
- Vertauschung der ersten und dritten Spalte.
  - Addition der durch 2 dividierten ersten Spalte zur zweiten und zur dritten Spalte.
  - Multiplikation der ersten Spalte mit 2, der zweiten Spalte mit 3 und der dritten Spalte mit 4.

19. Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit dem Verfahren Skript Seite 17 und machen Sie die Probe für Ihr Ergebnis. Was ist die Inverse von  $A^{-1}$ ?

20. Welche Koordinaten hat jener Vektor, der bezüglich der Basis  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  die Koordinaten 1, 2, 3 hat

a) bezüglich der Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$ ?

b) bezüglich der Basis  $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ ?