2. Übung Mathematik 2 für MB/VT/WI – 14.3.2011

Zur Erinnerung: Bitte nur Beispiele kreuzen, welche vollständig gelöst sind und an der Tafel ohne Unterlagen vorgerechnet werden können!

11. Sei
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
eine (allgemeine) (2×2)– Matrix, welche $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} > 0$, für jeden Vektor $\boldsymbol{x} = \binom{x_1}{x_2}$ ungleich $\binom{0}{0}$ des $\mathbb{R}^2$ erfüllt (Anmerkung: diese Eigenschaft nennt man positiv definit).

    (a) Welche Eigenschaft muss A noch erfüllen, damit das Produkt $\cdot_A$, welches via $\boldsymbol{x} \cdot_A \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{y}$ definiert wird, ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^2$ wird? Was ist überhaupt ein inneres Produkt?
    Anleitung: Rechnen Sie die drei definierenden Eigenschaften des inneren Produkts aus dem Skriptum nach (vgl. 5.1.2).

    (b) Geben Sie ein konkretes Beispiel einer solchen Matrix A an und berechnen Sie $\boldsymbol{x} \cdot_A \boldsymbol{y}$ aus (a) für konkrete Vektoren $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$.

    (c) Wie muss die Matrix A aussehen, damit $\boldsymbol{x} \cdot_A \boldsymbol{y}$ aus (a) das übliche innere Produkt wird?

12. (a) $C[a, b]$ bezeichne den Vektorraum aller auf $[a, b]$ stetigen Funktionen. Weisen Sie nach, dass durch
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$
ein inneres Produkt auf $C[a, b]$ gegeben ist.

    (b) Es sei speziell $[a, b] = [0, 2\pi]$, $f_n(x) = \sin(nx)$ und $g_n = \cos(nx)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Bestimmen Sie jeweils das innere Produkt $\langle f_i, f_k\rangle$ für $i \neq k$, $\langle f_i, f_i\rangle$ und $\langle f_i, g_i\rangle$.

13. Zeigen Sie: k paarweise orthogonale Elementen $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ (nicht notwendigerweise die Standardbasisvektoren!) in einem (mindestens k-dimensionalen) Vektorraum sind linear unabhängig. Erklären Sie diese Aussage speziell für $k = 2$ anhand eines Beispiels.
Anleitung: In die Definition der linearen Unabhängigkeit einsetzen, die auftretende Gleichung mit $\boldsymbol{u}_k$ multiplizieren $(k = 1, 2, \ldots, n)$ und die Orthogonalität ausnützen.

14. (Orthogonalisierungsverfahren von E.Schmidt)
Es sei $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ eine Basis eines n-dimensionalen Vektorraumes V. Zeigen Sie, dass die im folgenden definierten Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ eine Orthonormalbasis von V bilden!

    (i) $\boldsymbol{a}_1 = \dfrac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}$

    (ii) für $k = 2, \ldots, n$ sei
$$\boldsymbol{d}_k = \boldsymbol{b}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{a}_i\rangle \boldsymbol{a}_i$$
und
$$\boldsymbol{a}_k = \frac{\boldsymbol{d}_k}{\|\boldsymbol{d}_k\|}.$$

15. Wenden Sie das in Beispiel 14 beschriebene Verfahren an, um ausgehend von der Basis $1, x, x^2, \ldots, x^n$ eine Orthonormalbasis $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ des Vektorraumes P_n der Polynome vom Grad $\leq n$ auf $[-1, 1]$ zu berechnen. Dabei sei das innere Produkt $\langle p, q\rangle$ definiert durch
$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

Es genügt, wenn Sie bis $n = 2$ rechnen.

(Die Polynome $p_k(x) = \sqrt{\frac{2}{2k+1}}\,a_k(x)$ heißen Legendrepolynome k-ten Grades.)

16. (a) Weisen Sie nach, dass die Menge aller Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \qquad \text{für } a, b, c, \text{reell}$$

einen Vektorraum bilden. Geben Sie eine Basis für diesen Vekorraum an. Welche Dimension hat dieser Vektorraum?

(b) Warum bildet die Menge aller Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 0 & c \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \qquad \text{für } a, b, c, \text{reell}$$

keinen Vektorraum?

17. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

(a) $A + B$ und $B + A$.

(b) AB und BA. Was fällt Ihnen auf?

(c) AC. Fasst man die Spalten der Matrix A als Vektoren auf, so entspricht AC einer Summe von Vielfachen dieser Spaltenvektoren - welcher? Geben Sie eine geometrische Interpretation an.

(d) D^2 und D^3. Was fällt Ihnen hier auf?

18. (a) Berechnen Sie von folgenden Matrizen jeweils den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad D = (0, 0, 7).$$

(b) Geben Sie die (3×3)–Elementarmatrizen T folgender Umformungen an und bestätigen Sie die Richtigkeit Ihrer Elementarmatrix, indem Sie die Matrix $A' = A.T$ jeweils berechnen, wobei A aus (a) ist

i. Vertauschung der ersten und zweiten Spalte.

ii. Addition der mit 3 multiplizierten ersten Spalte zur dritten Spalte.

iii. Division der ersten Spalte durch 2, der zweiten Spalte durch 3 und der dritten Spalte durch 4.

19. Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit dem Verfahren Skript Seite 17 und machen Sie die Probe für Ihr Ergebnis. Was ist die Inverse von A^{-1}?

20. Welche Koordinaten hat jener Vektor, der bezüglich der Basis $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ die Koordinaten $1, 2, 1$ hat

a) bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$?

b) bezüglich der Basis $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$?