1. Übung Mathematik 2 für MB/VT/WI

Zur Erinnerung: Bitte nur Beispiele kreuzen, welche vollständig gelöst sind und an der Tafel ohne Unterlagen vorgerechnet werden können!

1. Sei $f(x)$ eine stetige Funktion. Bestimmen Sie alle stetig differenzierbaren Funktionen $y(x)$, die der homogenen Differentialgleichung 1. Ordnung
$$y'(x) = f(x)y(x)$$
genügen und zeigen Sie, dass Sie tatsächlich alle Lösungen gefunden haben.

2. Lösen Sie die folgenden homogenen Differentialgleichungen:
$$y' = -xy, \qquad y' = \frac{y}{x}, \qquad y' = \sin(x)y.$$
Bestätigen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie jeweils die Probe machen.

3. Seien $f(x)$ und $g(x) \neq 0$ stetige Funktionen. Bestimmen Sie alle stetig differenzierbaren Funktionen $y(x)$, die der inhomogenen Differentialgleichung 1. Ordnung
$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x) \qquad (*)$$
genügen, indem Sie
   (a) sich überlegen, dass zwei Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ der Differentialgleichung $(*)$ jedenfalls
   $$(y_1(x) - y_2(x))' = f(x)(y_1(x) - y_2(x))$$
   erfüllen ($y_1(x)$ und $y_2(x)$ in $(*)$ einsetzen und subtrahieren).
   (b) aus (a) schließen, dass jede Lösung von $(*)$ die Gestalt $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ hat, wobei $y_h(x)$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung, d.h., $y_h'(x) = f(x)y_h(x)$ ist und $y_p(x)$ eine Lösung von $(*)$ ist (die sogenannte partikuläre Lösung).
   (c) zur Bestimmung einer partikulären Lösung $y_p(x)$ den Ansatz $y_p(x) = y_h(x)c(x)$ in die Differentialgleichung $(*)$ einsetzen (Produktregel!) und $c(x)$ unter der Bedingung $y_h'(x) = f(x)y_h(x)$ explizit ausdrücken.

   (Anmerkung: vgl. Skript Mathematik 1)

4. Lösen Sie die folgenden inhomogenen Differentialgleichungen mit Variation der Konstanten:
$$y' = 2y + 1 + x^2 \qquad y' = 2y + e^x.$$
Bestätigen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie jeweils die Probe machen. Wie lautet die Lösung der Differentialgleichung $y' = 2y + 1 + x^2 + e^x$? Formulieren und begründen Sie eine allgemeine Aussage, die den Zusammenhang der (Partikulär–)Lösungen der drei Differentialgleichungen erklärt.

5. Gegeben sind folgende zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$
$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 17 \\ 17 \\ 17 \end{pmatrix}.$$
   (a) Bestätigen Sie anhand der Definition, dass $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ linear unabhängig sind?
   (b) Geben Sie die lineare Hülle $L = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ an.
   (c) Was bedeutet linear (un–)abhängig allgemein? Überlegen Sie sich, dass zwei linear abhängige Vektoren stets parallel sind.

(d) Geben Sie einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{c}$ an, sodass $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ eine Basis bilden.

(e) Geben Sie einen Vektor $\boldsymbol{e}$ an, sodass $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{e}$ sowie $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{e}$ jeweils paarweise linar unabhängig sind, aber $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{e}$ insgesamt linear abhängig sind.

6. Machen Sie plausibel, dass für eine beliebige Menge von (endlich vielen) Vektoren $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ im $\mathbb{R}^n$

   (a) $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ echt in $[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k]$ enthalten ist, d.h.

   $$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\} \subsetneq [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k].$$

   (b) mehrfache Bildung der linearen Hülle einer Menge keine neuen Elemente bringt, d.h.

   $$[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k] = [[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k]].$$

....

Um Missverständnissen vorzubeugen: Um nachzuweisen, dass eine Menge M ein Vektorraum ist, muss die Definition (Skript Seite 5) angewendet werden, d.h. zu überprüfen sind, dass

(A) M nichtleer ist.

(B) mit $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ aus M auch $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ in M liegt, d.h. M ist bezüglich Addition abgeschlossen.

(C) mit $\boldsymbol{x}$ aus M und $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $\lambda \boldsymbol{x}$ in M liegt, d.h. M ist bezüglich der Multiplikation mit einem Skalar abgeschlossen.

(D) Addition und Multiplikation die Grundeigenschaften (i)–(vii) in 5.1.1 erfüllen.

Möchte man nur überprüfen, ob eine Teilmenge eines Vektorraumes selbst wieder ein Vektorraum ist, so weiß man, dass die Grundeigenschaften (i)-(vii) in 5.1.1. erfüllt sind. D.h., man überprüft nur die Punkte (A)–(C) (und zeigt damit, dass M ein sogenannter *Untervektorraum* ist).

Die gute Nachricht: Wenn im Weiteren nicht explizit anders angegeben, überprüfen Sie nur die Punkte (A)–(C) um festzustellen, ob eine Menge ein Vektorraum ist!

....

7. Wählen Sie c reell so, dass die Menge

   $$M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = c \right\},$$

   einen Vektorraum bildet. Geben Sie eine Basis für diesen Vektorraum an.

8. Welche der folgenden Mengen sind Vektorräume?

   (a) $\{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2\}$,
   (b) $\{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1/2 + x_3/2 = x_2/4\}$,
   (c) $\{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$,
   (d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 :$ genau zwei Koordinaten sind negativ$\}$,
   (e) $\{(\mu + \lambda, \lambda^2)^T \in \mathbb{R}^2 : \mu, \lambda \in \mathbb{R}\}$,

   Geben Sie zu obigen Mengen, welche Vektorräume sind, jeweils eine Basis an.

9. Zeigen Sie, dass der Raum der Lösungen der homogenen Differentialgleichung $y' = 17y$ einen Vektorraum bildet. Welche Dimension hat dieser Vektorraum? Geben Sie eine Basis für diesen Vektorraum an. Zeigen Sie, dass der Raum der Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung $y' = 17y + 17$ keinen Vektorraum bildet.

10. (a) Zeigen Sie, dass die Menge $C([-1,1])$ der auf $[-1,1]$ stetigen Funktionen ein Vektorraum ist.

    (b) Zeigen Sie, dass $1, x, x^2, \ldots, x^n$ in $C([-1,1])$ linear unabhängig sind.
    Hinweis: Dies kann durch n–faches Differenzieren der Gleichung $c_0 \cdot 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots c_n x^n = 0$ nachgewiesen werden.

    (c) Zeigen Sie, dass die Menge $C_k([-1,1])$ der auf $[-1,1]$ stetigen Funktionen, welche zusätzlich $f(0) = k$ erfüllen genau dann ein Vektorraum ist, wenn $k = 0$. ein Vektorraum ist.