1. Welche Aussagen über die Lösung von

$$e^z = -e$$

sind korrekt?

(1) $z = -1$ ist eine Lösung und es gibt weitere Lösungen.

(2) $z = -1$ ist die einzige Lösung.

(3) $z = 1 + i\,\pi$ ist eine Lösung und es gibt weitere Lösungen.

(4) $z = 1 + i\,\pi$ ist die einzige Lösung.

---

2. Ziehen Sie die vierte Wurzel aus (-16). Was erhalten Sie:

(1) Da (-16) negativ ist, kann man die vierte Wurzel nicht ziehen.

(2) $\sqrt[4]{-16} = -2i$

(3) $\sqrt[4]{-16} = -\sqrt{2}(1+i)$

(4) $\sqrt[4]{-16} = \pm\sqrt{2}(1 \pm i)$

---

3. (i) $z < 2$
(ii) $\operatorname{Re} z < 2$
(iii) $|z| < 2$
(iv) $\operatorname{Re}(z^2) + \operatorname{Im}(z^2) < 2$
(v) $(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 < 2$

Welche dieser Ungleichungen beschreiben eine Kreisscheibe?

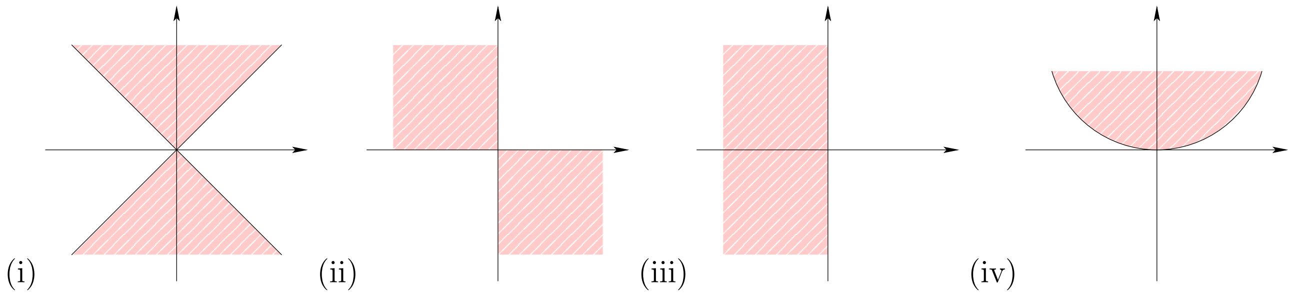
(1) (i), (iii) und (iv)

(2) alle

(3) (iii) und (v)

(4) (ii) und (iv)

4. Welche der abgebildeten Teilmengen von $\mathbb{C}$ entsprechen der durch $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z^2) \le 0\}$ definierten Menge?



(1) (i)

(2) (ii)

(3) (iii)

(4) (iv)

---

5. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und sei $|f(z)| \le |z^2|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Welche der folgenden Funktionen erfüllt diese Bedingung und ist ganz?

(i) $f(z) = \sin^2(z)$

(ii) $f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{for} \quad |z| \le 1 \\ z & \text{for} \quad |z| \ge 1 \end{cases}$

(iii) $f(z) = z + 1$

Welche Aussagen sind korrekt?

(1) (i)

(2) (ii)

(3) (iii)

(4) keine

6.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

Welche Aussagen ist korrekt?

(1) Der Konvergenzradius der Reihe ist ∞.

(2) Die Reihe konvergiert gleichmäßig für alle $|z| \le 1$.

(3) Die Reihe stellt auf $B(0, 2)$ eine holomorphe Funktion dar.

(4) Die Reihe konvergiert nur bei $z = 0$.

7. Sei $f \in \mathcal{H}(G)$, G ein Gebiet und $B(1,2) \subset G$. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-1)^n$ die Taylorreihe von f. Welche Aussage ist korrekt?

   (1) Die Reihe konvergiert für alle $z \in G$.

   (2) Die Reihe konvergiert für alle $z \in B(1,2)$, aber nicht notwendig für alle $z \in G$.

   (3) Der Konvergenzradius der Reihe ist kleiner als 2.

   (4) Die Reihe konvergiert nicht bei 2.

---

8. Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-1)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 3.

   (i) $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|w-1|=1} \frac{f(w)}{(w-1)^{n+1}}\,dw$

   (ii) $a_n = \dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}$

   (iii) $f^{(n)}(a_n) = n!$

   Welche Aussagen sind korrekt?

   (1) (i) und (ii)

   (2) alle

   (3) (i) und (iii)

   (4) (ii) und (iii)

---

9. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

   (i) Wenn f beschränkt und konstant ist, dann ist f ganz.

   (ii) Wenn f ganz und konstant ist, dann ist f beschränkt.

   (iii) Wenn f beschränkt und ganz ist, dann ist f konstant.

   Welche Aussagen sind korrekt?

   (1) (i) und (iii)

   (2) alle

   (3) (i) und (ii)

   (4) (ii) und (iii)

10. Sei U eine offene Menge und $f \in \mathcal{H}(U)$.

   (i) Wenn $|f(z)| = 0$ für alle $z \in U$, dann ist f konstant.

   (ii) Wenn $|f(z)| = 1$ für alle $z \in U$, dann ist f konstant.

   (iii) Wenn $|f(z)| = 2$ für alle $z \in U$ und U zusammenhängend ist, dann ist f konstant.

   Welche Aussagen sind korrekt?

   (1) (i) und (ii)

   (2) (i) und (iii)

   (3) alle

   (4) (ii) und (iii)

---

11. Sei $P(z)$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, und sei

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid P(z) = 1\}.$$

   Welche Aussage über A trifft zu?

   (1) A hat höchstens $n-1$ Elemente.

   (2) Im Allgemeinen kann A unendlich viele Elemente haben.

   (3) Wenn man Vielfachheiten berücksichtigt, muß A genau n Elemente haben.

   (4) Es gibt zumindest ein Polynom, für das A leer ist.

---

12. Sei $f \in \mathcal{H}(G)$, $f \in \mathcal{C}(G \cup \partial G)$, G ein beschränktes Gebiet.

   (i) f nimmt sein Minimum am Rand an.

   (ii) f nimmt sein Maximum am Rand an.

   (iii) Wenn f sein Maximum in G annimmt, dann nimmt f auch sein Minimum in G an.

   (iv) Wenn f sein Minimum in G annimmt, dann nimmt f auch sein Maximum in G an.

   Welche Aussagen sind korrekt?

   (1) alle

   (2) (i) und (ii) und (iii)

   (3) (ii) und (iii) und (iv)

   (4) (ii) und (iii)

13. Sei $f \in \mathcal{H}(G)$, G ein Gebiet, γ eine geschlossene Kurve in G.

   (i) $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

   (ii) f hat eine Stammfunktion auf G.

   (iii) Wenn f eine Stammfunktion auf G hat, dann $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

   (iv) Wenn $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, dann hat f eine Stammfunktion auf G.

   Welche Aussagen sind korrekt?

   (1) (i)

   (2) (ii)

   (3) (iii)

   (4) (iv)

---

14. (i) $\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=2} \frac{\sin^2(w)}{w-3}\,dw = \sin^2(3)$

   (ii) $\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=2} \frac{\sin^2(w)}{w-1}\,dw = \sin^2(1)$

   (iii) $\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=2} \frac{\sin^2(w)}{w^2}\,dw = 1$

   (iv) $\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=2} \frac{\sin(w)}{w^2}\,dw = 1$

   Welche Aussagen sind korrekt?

   (1) (i) und (iii)

   (2) (i) und (iv)

   (3) (ii) und (iii)

   (4) (ii) und (iv)

---

15. Klassifizieren Sie die Singularitäten folgender Funktion:

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

   (1) hat nur hebbare Singulariäten.

   (2) hat genau eine Polstelle bei 0.

   (3) hat unendlich viele Polstellen.

   (4) hat eine wesentliche Singularität bei 0.

16. Sei $\gamma(t) = 1 + 2\, e^{2\pi i t}$, $0 \le t \le 1$.

(i) γ ist nullhomotop in $\mathbb{C}\backslash\{i, -i\}$.
(ii) γ ist nullhomotop in $\mathbb{C}\backslash\{5 + 4i\}$.
(iii) γ ist nullhomotop in $\mathbb{C}$.
(iv) γ ist nullhomotop in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Welche Aussagen sind korrekt?

(1) (i) und (iii)
(2) (i) und (iv)
(3) (ii) und (iii)
(4) (ii) und (iv)

---

17. Sei $\gamma(t) = 1 + 2\, e^{2\pi i t}$, $0 \le t \le 1$ und $\sigma(t) = \frac{1}{2}\, e^{-2\pi i t}$, $0 \le t \le 1$.

(i) γ ist homotop zu σ in $\mathbb{C}\backslash\{i, -i\}$.
(ii) γ ist homotop zu σ in $\mathbb{C}\backslash\{5 + 4i\}$.
(iii) γ ist homotop zu σ in $\mathbb{C}$.
(iv) γ ist homotop zu σ in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Welche Aussagen sind korrekt?

(1) (i) und (ii)
(2) (ii) und (iii)
(3) (ii) und (iii) und (iv)
(4) (ii) und (iv)

---

18. Sei $f_n \in \mathcal{H}(G)$ für $n = 1, \ldots$ und sei G ein Gebiet. Welche Aussage ist korrekt?

(1) Wenn f_n lokal gleichmäßig beschränkt ist, dann hat die Grenzfunktion keine Nullstellen.
(2) Wenn f_n lokal gleichmäßig beschränkt ist, dann ist f_n kompakt konvergent.
(3) Wenn f_n lokal gleichmäßig beschränkt ist, dann existiert eine kompakt konvergente Teilfolge von f_n.
(4) Wenn f_n gleichmäßig beschränkt ist, dann ist f_n punktweise konvergent.