Prüfung aus Mathematik 3 für MB, VT, WI

am 18. Jänner 2019

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f = u + iv : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Beweisen Sie die beiden folgenden Aussagen:

   (a) Die Funktionen u und v erfüllen die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen
   $$u_x = v_y \qquad \text{und} \qquad u_y = -v_x.$$

   (b) Für jeden geschlossenen Integrationsweg C in G ist
   $$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

2. (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Randwertproblems
   $$y'' + \omega^2 y = 0, \qquad y'(0) = y'(\pi) = 0.$$
   Hinweis: Es ist $\omega^2 \geq 0$.

   (b) Entwickeln Sie die auf $[0, \pi]$ definierte Funktion
   $$f(x) = 1 + x$$
   in eine Fourierreihe bezüglich der Eigenfunktionen des Randwertproblems aus (a).

3. (a) Es sei $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ integrierbar und $|y(t)| \leq ke^{ct}$ für $t \geq 0$ mit $k, c \in \mathbb{R}$ fest.
   Geben Sie die Definition der Laplacetransformierten $\mathcal{L}\{y\}$ von y an und verwenden Sie diese um zu zeigen, dass
   $$\mathcal{L}\{y'\}(s) = s\mathcal{L}\{y\} - y(0). \tag{1}$$
   Welche Formel ergibt sich durch Iteration von (1) für $\mathcal{L}\{y''\}$?

   (b) Verwenden Sie die Laplacetransformation zur Lösung des Anfangswertproblems
   $$y''(t) + y(t) = t, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1.$$

4. (a) Geben Sie die Lösungsformel von D'Alembert für die beidseitig unbeschränkte Schwingungsgleichung der folgenden Form an (*Herleitung ist nicht notwendig*):
   $$u_{tt} = 16u_{xx}, \qquad u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = h(x).$$
   Bestimmen Sie speziell für
   $$g(x) = \sin x \qquad \text{und} \qquad h(x) = \cos x$$
   die Lösung dieses Problems explizit.

   (b) Bestimmen und skizzieren Sie die Charakteristiken der Differentialgleichung
   $$yu_x - xu_y = 0.$$
   Ermitteln Sie außerdem eine Lösung, die der Bedingung $u(x, 0) = x$ genügt.