
Fehlerkorrigierende Codes, Übungen

Sommersemester 2026

Beispiele für die Übungen am 16.3.2026

1. Man überlege, warum der EAN-Code Übertragungsfehler der Form $1a \rightarrow a0$, $a \in \{2, 3, \dots, 9\}$, immer erkennen kann.
2. Sei $a_1 a_2 \dots a_{10} \in \{0, 1, \dots, 9\}^{10}$ eine österreichische Sozialversicherungsnummer. Die Ziffern a_i sind dabei so gewählt, dass deren gewichtete Summe

$$8a_1 + 4a_2 + 2a_3 + a_4 + 6a_5 + 3a_6 + 7a_7 + 9a_8 + 10a_9 + 5a_{10}$$

stets durch 11 teilbar ist. Was leistet diese Codierung hinsichtlich Fehlererkennung und -korrektur? Wie viele Sozialversicherungsnummern pro Geburtstag (modulo 100 Jahren) gibt es?

3. Eine Prüfzeichen-Codierung über $\mathbb{Z}_p$ besteht aus n Permutationen $f_1, \dots, f_n$ von $\mathbb{Z}_p$ und einem Element $c \in \mathbb{Z}_p$. Dabei wird ein Wort $a_1 \dots a_{n-1} \in \mathbb{Z}_p^{n-1}$ so um ein Prüfzeichen a_n erweitert, dass die Kontrollgleichung

$$f_1(a_1) + \dots + f_n(a_n) \equiv c \pmod{p}$$

erfüllt ist.

Man zeige für $n \geq 3$: Eine Prüfziffer-Codierung erkennt genau dann alle Nachbar-Transpositionen

$$a_1 \dots a_j a_{j+1} \dots a_n \longrightarrow a_1 \dots a_{j+1} a_j \dots a_n$$

wenn für alle $x, y \in \mathbb{Z}_p$, $x \neq y$, und für alle $i = 1, \dots, n-1$ gilt

$$f_{i+1}(f_i^{-1}(x)) - x \neq f_{i+1}(f_i^{-1}(y)) - y.$$

4. Eine Funktion $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ heißt Orthomorphismus von $\mathbb{Z}_p$, wenn $f(x)$ und $f(x) - x$ Permutationen sind.

Man zeige: Es existiert genau dann eine Prüfzeichen-Codierung über $\mathbb{Z}_p$, die jede Nachbar-Transposition erkennt, wenn es einen Orthomorphismus von $\mathbb{Z}_p$ gibt.

Auf welchen Orthomorphismen basieren Sozialversicherungsnummer bzw. ISBN-10?

5. Für den Code 5) aus den einführenden Beispielen
 - (a) decodiere man die Empfangswörter 10010 bzw. 00111,
 - (b) überlege man, dass kein einziger Fehler an zwei Stellen (in eindeutiger Weise) richtig korrigiert werden kann.