Fehlerkorrigierende Codes, Übungen

Sommersemester 2023

Beispiele für die Übungen am 16.3.2023

1. Man überlege, warum der EAN-Code Übertragungsfehler der Form $1a \to a0$, $a \in \{2, 3, \ldots, 9\}$, immer erkennen kann.

2. Sei $a_1 a_2 \ldots a_{10} \in \{0, 1, \ldots, 9\}^{10}$ eine österreichische Sozialversicherungsnummer. Die Ziffern a_i sind dabei so gewählt, dass deren gewichtete Summe

$$8a_1 + 4a_2 + 2a_3 + a_4 + 6a_5 + 3a_6 + 7a_7 + 9a_8 + 10a_9 + 5a_{10}$$

   stets durch 11 teilbar ist. Was leistet diese Codierung hinsichtlich Fehlererkennung und -korrektur? Wie viele Sozialversicherungsnummern pro Geburtstag (modulo 100 Jahren) gibt es?

3. Eine Prüfzeichen-Codierung über $\mathbb{Z}_p$ besteht aus n Permutationen $f_1, \ldots, f_n$ von $\mathbb{Z}_p$ und einem Element $c \in \mathbb{Z}_p$. Dabei wird ein Wort $a_1 \ldots a_{n-1} \in \mathbb{Z}_p^{n-1}$ so um ein Prüfzeichen a_n erweitert, dass die Kontrollgleichung

$$f_1(a_1) + \ldots + f_n(a_n) \equiv c \bmod p$$

   erfüllt ist.

   Man zeige für $n \geq 3$: Eine Prüfziffer-Codierung erkennt genau dann alle Nachbar-Transpositionen

$$a_1 \ldots a_j a_{j+1} \ldots a_n \longrightarrow a_1 \ldots a_{j+1} a_j \ldots a_n$$

   wenn für alle $x, y \in \mathbb{Z}_p$, $x \neq y$, und für alle $i = 1, \ldots, n-1$ gilt

$$f_{i+1}(f_i^{-1}(x)) - x \neq f_{i+1}(f_i^{-1}(y)) - y.$$

4. Eine Funktion $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ heißt Orthomorphismus von $\mathbb{Z}_p$, wenn $f(x)$ und $f(x) - x$ Permutationen sind.

   Man zeige: Es existiert genau dann eine Prüfzeichen-Codierung über $\mathbb{Z}_p$, die jede Nachbar-Transposition erkennt, wenn es einen Orthomorphismus von $\mathbb{Z}_p$ gibt.

   Auf welchen Orthomorphismen basieren Sozialversicherungsnummer bzw. ISBN-10?

5. Für den Code 5) aus den einführenden Beispielen

   (a) decodiere man die Empfangswörter 10010 bzw. 00111,

   (b) überlege man, dass kein einziger Fehler an zwei Stellen (in eindeutiger Weise) richtig korrigiert werden kann.