
Fehlerkorrigierende Codes, Übungen

Sommersemester 2023

Beispiele für die Übung am 22.6.2023

51. Sei $\alpha \in \mathbb{F}_{16}$ mit $\alpha^4 = \alpha + 1$. Wir betrachten den BCH Code der Länge 15 mit Generatorpolynom $g(x) = \text{kgV}\{m^{(1)}(x), m^{(3)}(x)\}$ und Kontrollmatrix

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{14} \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^{2 \cdot 3} & \dots & \alpha^{14 \cdot 3} \end{pmatrix}.$$

Für die Empfangsworte $v_i(x)$ wurden folgende Syndrome $s_H(v_i(x)) = (v_i(\alpha), v_i(\alpha^3))$, $i = 1, 2, 3$, ermittelt:

$$s_H(v_1(x)) = (0, \alpha^4), \quad s_H(v_2(x)) = (\alpha^7, \alpha^6), \quad s_H(v_3(x)) = (\alpha^{14}, \alpha).$$

Man ermittle jeweils, welcher Fehler vorliegt (z.B. Einfachfehler an der Stelle j). (Hinweis: Bei einem Zweifachfehler bestimme man die Lösungen der zugehörigen quadratischen Gleichung durch Probieren.)

52. Sei $T_m(x) := x + x^q + \dots + x^{q^{m-1}}$, q eine Primzahlpotenz, $m \geq 1$. Man zeige für $s \in \mathbb{F}_q$

$$T_m(x) - s = \prod_{\substack{T_m(\beta) = s \\ \beta \in \mathbb{F}_{q^m}}} (x - \beta),$$

und

$$x^{q^m} - x = \prod_{s \in \mathbb{F}_q} (T_m(x) - s).$$

53. Man zeige: $\text{Tr}_{\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q}(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta^q - \beta$ für ein $\beta \in \mathbb{F}_{q^m}$.
54. Man bestimme alle normale Basen von $\mathbb{F}_{16}/\mathbb{F}_2$ und berechne die Spurabbildungen $\text{Tr}_{\mathbb{F}_{16}/\mathbb{F}_2}$ und $\text{Tr}_{\mathbb{F}_{16}/\mathbb{F}_4}$.
55. Sei $\alpha \in \mathbb{F}_{16}$ mit $\alpha^4 = \alpha + 1$. Man löse die quadratischen Gleichungen

$$x^2 + \alpha^{14}x + \alpha^{15} = 0, \quad x^2 + \alpha^4x + \alpha^{14} = 0, \quad \alpha x^2 + \alpha^{10} = 0$$

in \mathbb{F}_{16} auf systematischem Weg mit Hilfe einer normalen Basis.