ADM, 2021S

Übungsaufgaben zur Algebra und Diskreten Mathematik für Informatik und Wirtschaftsinformatik

1 Grundlagen

1. Man überprüfe die Gleichung

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-1)\cdot n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}, \quad n\geq 2$$

für $n = 2,3,4,5$ und beweise sodann deren Gültigkeit für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ durch vollständige Induktion.

2. Man zeige mittels vollständiger Induktion, dass für die rekursiv definierte Folge $x_0 = 1$, $x_1 = 25$ und $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n + 32$ für $n \geq 0$ allgemein gilt:

$$x_n = (4n + 1)^2 \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

3. Man untersuche mittels vollständiger Induktion, für welche $n \in \mathbb{N}$ die angegebene Ungleichung gilt:

$$1+6n+2^n<3^n.$$

4. Nach der so genannten „abessinischen Bauernmethode“ werden zwei Zahlen, z.B. 21 und 17, wie folgt multipliziert:

$$\begin{array}{rr} 21 & 17 \\ \cancel{10} & \cancel{34} \\ 5 & 68 \\ \cancel{2} & \cancel{136} \\ 1 & 272 \\ \hline & 357 \end{array}$$

Dabei wird der erste Faktor laufend durch 2 dividiert (und der Rest dabei vernachlässigt), während der zweite Faktor stets verdoppelt wird. Nach dem Motto der abessinischen Bauern „Gerade Zahlen bringen Unglück“ streicht man nun alle Zeilen, in denen die Zahl in der ersten Spalte gerade ist. Die Summe der verbleibenden Zahlen in der zweiten Spalte liefert dann das Ergebnis $21 \cdot 17 = 357$.
Man begründe, warum diese Methode zum richtigen Resultat führt. (Hinweis: Man gehe von einer Darstellung des ersten Faktors im Binärsystem aus.)

5. Man bestimme rechnerisch und graphisch Summe, Differenz, Produkt und Quotienten der komplexen Zahlen $z_1 = 4 - 3i$ und $z_2 = [2; \pi/2]$.

6. Man finde alle sechsten Wurzeln von $z = -125$ in $\mathbb{C}$ und stelle sie in der Gaußschen Zahlenebene dar.

7. (a) Man bestimme den ggT(222, 846) mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

(b) Man finde zwei ganze Zahlen x und y, welche die Gleichung $330x + 187y = 11$ erfüllen.

8. Man beweise die folgenden Regeln für das Rechnen mit Kongruenzen:

   (a) $a \equiv b \mod m,\ c \equiv d \mod m \;\Rightarrow\; a + c \equiv b + d \mod m$

   (b) $a \equiv b \mod m,\ c \equiv d \mod m \;\Rightarrow\; a \cdot c \equiv b \cdot d \mod m$

   (c) $a \cdot c \equiv b \cdot c \mod m \cdot c$ und $c \neq 0 \;\Rightarrow\; a \equiv b \mod m$

9. Man löse die folgenden Kongruenzen bzw. beweise deren Unlösbarkeit (in $\mathbb{Z}$):

$$8x \equiv 4 \mod 15,\quad 8x \equiv 4 \mod 16 \;\text{ sowie }\; x^2 \equiv 2 \mod 7$$

10. Im europäischen Artikelnummernsystem EAN werden Zahlen mit 13 Dezimalziffern der Form $a_1\, a_2 \ldots a_{12}\, p$ verwendet. Dabei wird die letzte der 13 Ziffern, das ist die Prüfziffer p, im EAN-Code so bestimmt, dass

$$a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + \ldots + a_{11} + 3a_{12} + p \equiv 0 \mod 10$$

gilt. Man zeige, dass beim EAN-Code ein Fehler in einer einzelnen Ziffer stets erkannt wird, während eine Vertauschung von zwei verschiedenen benachbarten Ziffern nur dann erkannt wird, wenn sich die beiden Ziffern nicht um 5 unterscheiden.

11. Man bestimme alle $m, n \in \mathbb{N}$, für welche die Prädikate P(n) bzw. P(m,n) in eine wahre Aussage übergehen.

   (a) $P(n)$: $n! \leq 10n$

   (b) $P(n)$: $(n^2 - 5n - 6 \geq 0) \;\rightarrow\; (n \leq 10)$

   (c) $P(m, n)$: $(m = n!) \;\rightarrow\;$ (m ist durch 10 teilbar)

12. Man zeige, dass es sich bei dem logischen Ausdruck

$$F(a,b,c) = [(b \vee c) \;\wedge\; (b \rightarrow \neg a) \;\wedge\; a] \;\rightarrow\; c$$

um eine Tautologie bzw. bei dem Ausdruck

$$G(a,b,c) = (a \rightarrow c) \;\wedge\; (c \rightarrow b) \;\wedge\; a \;\wedge\; \neg b$$

um eine Kontradiktion handelt.

13. Man bestätige die Richtigkeit der folgenden Behauptungen:

   (a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 - n$ stets durch 3 teilbar – mittels eines direkten Beweises.

   (b) Ist die Summe $m + n$ zweier Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ ungerade, dann ist genau einer der beiden Summanden ungerade – mittels eines indirekten Beweises.

   (c) Ist das Quadrat n^2 einer ganzen Zahl $n \in \mathbb{Z}$ gerade, dann ist auch n gerade – mittels eines Beweises durch Kontraposition.

   (d) Die Aussage von (a) – mittels eines Beweises durch vollständige Induktion.

14. Man beweise, dass die folgenden drei Aussagen für beliebige Mengen A, B äquivalent sind:

   (i) $A \cap B = A$ (ii) $A \cup B = B$ (iii) $A \subseteq B$

15. Man beweise die folgenden Beziehungen für Mengen A, B, C mit Hilfe von Elementtabellen oder gebe ein konkretes Gegenbeispiel an:

(a) $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$

(b) $A \,\Delta\, (B \cap C) = (A \,\Delta\, B) \cap (A \,\Delta\, C)$

16. Sei $A = \{1, 2, ..., 8\}$ und R eine binäre Relation auf A, definiert durch

$$a \mathrel{R} b \;\Leftrightarrow\; a = b \text{ oder } \mathrm{ggT}(a,b) = 2 \quad \forall\, a, b \in A.$$

Man gebe explizit die Relation R sowie ihren Graphen G(R) an, und untersuche R in Hinblick auf die Eigenschaften Reflexivität (R), Symmetrie (S), Antisymmetrie (A) und Transitivität (T).

17. Man zeige, dass durch

$$a \mathrel{R} b \;\Leftrightarrow\; 6 \mid a^2 - b^2 \quad \forall\, a,b \in \mathbb{Z}$$

eine Äquivalenzrelation R in der Menge $\mathbb{Z}$ erklärt wird, und bestimme die zugehörende Partition.

18. Man vergleiche die Hassediagramme der beiden Halbordnungen $(P(\{a,b,c\}), \subseteq)$ und $(T_{70}, \mid)$.

19. Zu den nachstehenden Funktionen f bzw. g auf der Menge $\{0, 1, ..., 9\}$ bestimme man jeweils den Funktionsgraphen und untersuche die angegebenen Zuordnungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:
(a) $f(x) = x^2 \bmod 10$ (b) $g(x) = x^3 \bmod 10$

20. Man zeige, dass die Funktion f mit $y = f(x) = \dfrac{2x+3}{5-x}$ das Intervall $[-8, 4]$ bijektiv auf das Intervall $[-1, 11]$ abbildet, und bestimme ihre Umkehrfunktion.

2 Diskrete Mathematik

21. (a) Man beweise folgende Verallgemeinerung des Schubfachprinzips: Verteilt man n Objekte auf k Fächer mit $n > k$, so existiert ein Fach, das mindestens $\left\lceil \dfrac{n}{k} \right\rceil$ Objekte enthält.
(b) Damit zeige man, dass es unter sechs Personen stets drei Personen gibt, die einander alle kennen, oder drei Personen, die sich paarweise nicht kennen (Partyproblem).

22. Man beweise nachstehende Identitäten für Binomialkoeffizienten:

(a) $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$ (b) $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ (für $n \geq 1$)

23. Wie viele verschiedene Variablennamen kann man in einer fiktiven Programmiersprache verwenden, wenn diese Namen aus mindestens einem, höchstens aber vier (nicht notwendig verschiedenen) Buchstaben {A,...,Z} bestehen, und die Wörter AND, OR, IF, THEN und GOTO nicht als Teilwörter enthalten sein dürfen.

24. Wie viele verschiedene Tipps müssen beim Lotto „6 aus 45“ abgegeben werden, um sicher einen Sechser zu erzielen? Wie viele verschiedene Tipps gibt es überhaupt in den Gewinnrängen (d.h. Dreier oder besser)? Bei wie vielen möglichen Tipps stimmt mindestens eine Zahl, bei wie vielen sind alle Zahlen falsch?

25. (a) Wie viele verschiedene Wörter kann man durch Permutation der Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI bilden?
(b) Wie viele verschiedene Wörter kann man durch Permutation der Buchstaben {A,B,C,D,E,F,G,H} bilden, in denen weder der Block ACG noch der Block CGBE vorkommt?

26. Wie viele natürliche Zahlen n mit $1 \le n \le 1000$ gibt es, die durch 3, 13 oder durch 23 teilbar sind? Wie viele sind weder durch 3, noch durch 13, noch durch 23 teilbar?

27. Wie viele natürliche Zahlen n mit $1 \le n \le 10^6$ gibt es, die weder gerade sind, noch Quadratzahlen, noch dritte Potenzen natürlicher Zahlen sind?

28. Man finde die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

(a) $4x_{n+1} - 6x_n + 1 = 0 \;\; (n \ge 0)$

(b) $x_{n+1} - x_n - 10 = 0 \;\; (n \ge 0)$

sowie die jeweilige partikuläre Lösung zur Anfangsbedingung $x_0 = 5$.

29. Gesucht ist die partikuläre Lösung der linearen Differenzengleichung

$$x_{n+1} = (n + 1)x_n + 7(n + 1)!, \;\; n = 0,1,2,...$$

zum Anfangswert $x_0 = 7$.

30. Gesucht ist die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$x_{n+1} = 3^{2n} x_n + 3^{n^2}, \;\; n = 0,1,2,...$$

31. Man bestimme die Lösung der Differenzengleichung $x_{n+1} = \sqrt{20 + x_n}$ (für $n \ge 0$) zum Anfangswert $x_0 = 0$ auf graphischem Weg, berechne die Gleichgewichtspunkte und überprüfe sie auf Stabilität.

32. Man bestimme die Lösung nachstehender Differenzengleichung zu den vorgegebenen Anfangsbedingungen:

$$4x_{n+2} + 12x_{n+1} - 7x_n = 36, \;\; x_0 = 6, \; x_1 = 3.$$

33. Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

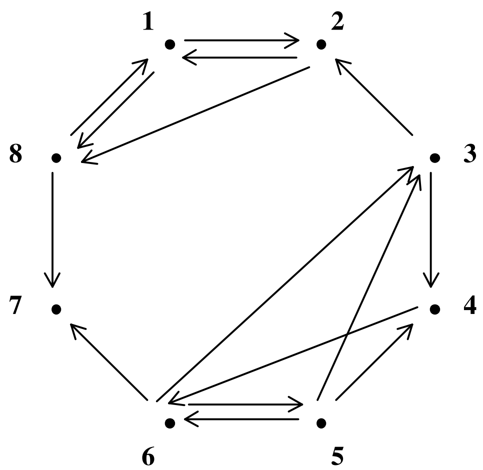
$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 8 + 3^n, \;\; n = 0,1,2,...$$

34. Gegeben sei der ungerichtete schlichte Graph G = (V,E) mit V = {a,b,c,d,e} und E = {ab,ac,ae,bc,bd,ce}. Man veranschauliche G graphisch, bestimme seine Adjazenzmatrix sowie alle Knotengrade und zeige, dass die Anzahl der Knoten, die einen ungeraden Knotengrad besitzen, gerade ist. Gilt diese Aussage in jedem ungerichteten Graphen?

35. (a) In nachstehendem Graphen gebe man (verschiedene) Beispiele für eine gerichtete Kantenfolge, einen Kantenzug und einen Weg vom Knoten 6 zum Knoten 1 an.

    (b) Desgleichen finde man eine geschlossene Kantenfolge, einen geschlossenen Kantenzug sowie einen Kreis jeweils durch den Knoten 5.

    (c) Man zeige, dass G schwach, aber nicht stark zusammenhängend ist, und bestimme die starken Zusammenhangskomponenten.



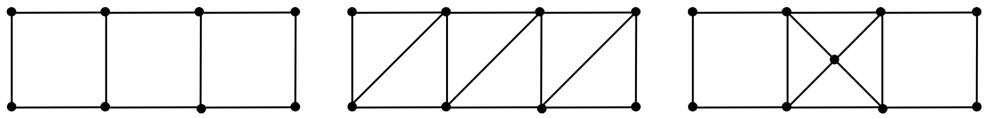
36. Ein vollständiger Binärbaum ist ein Wurzelbaum, bei dem jeder interne Knoten genau zwei Nachfolger besitzt. Man zeige, dass ein Binärbaum mit m internen Knoten genau m + 1 Endknoten hat.
    Wie viele Endknoten hat ein t-ärer Baum (t = 2,3,...) mit m internen Knoten, d.h. ein Wurzelbaum, bei dem jeder interne Knoten genau t Nachfolger besitzt? (Für t = 2 ergibt sich also ein vollständiger Binärbaum.)

37. Gegeben sei ein gerichteter Graph G mit der Knotenmenge V(G) = {a,b,c,d,e,f,g,h} und der Adjazenzmatrix

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Man veranschauliche G graphisch und beweise algorithmisch, dass G ein azyklischer Graph ist. Wie sieht eine topologische Knotensortierung aus, d.h., in welcher Reihenfolge müssen die Knoten nummeriert werden, damit alle Kanten in Richtung aufsteigender Knotennummern verlaufen? Wie lautet die Adjazenzmatrix, wenn man Zeilen und Spalten entsprechend der Reihenfolge der Sortierung bezeichnet, und welches Muster ist dabei zu erkennen?

38. Man untersuche, welche der nachstehenden Graphen Eulersche oder Hamiltonsche Graphen sind. Gegebenenfalls gebe man Eulersche bzw. Hamiltonsche Linien an.



39. (a) Man zeichne eine schematische Landkarte der österreichischen Bundesländer (ohne Wien, warum?) als planaren Graphen, welcher zumindest alle Drei-Länder-Ecken als Knoten enthält, und verifiziere die Euler'sche Polyederformel.
(b) Formulieren und beweisen Sie die Euler'sche Polyederformel für nicht zusammenhängende planare Graphen.

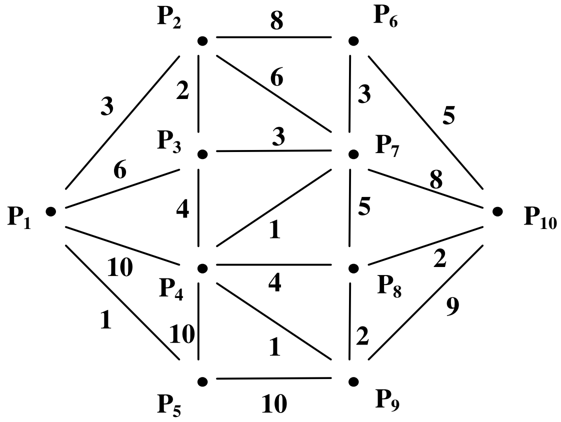
40. Gegeben sei ein ungerichteter, zusammenhängender, bewerteter Graph G = (V,E,w) mit V = {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l} durch seine Kanten / Bewertungen:

ab/3, ac/2, ad/7, ae/2, bd/4, bf/8, bk/6, bl/1, cf/2, ck/5, de/1,
df/6, dg/9, dh/6, dj/1, ef/2, ei/1, fg/2, gh/4, fk/6, gi/6, hk/7.

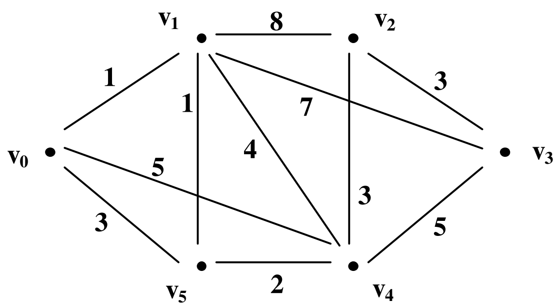
(a) Man gebe drei verschiedene spannende Bäume von G an.

(b) Man bestimme ein Minimalgerüst T von G und dessen Gesamtlänge w(T).

41. In der folgenden schematisch skizzierten Landkarte sind für eine bestimmte Fracht die Transportkosten zwischen einzelnen Orten angegeben. Welches ist der billigste Weg vom Ort P_1 zum Ort P_{10}?



42. In nachstehendem bewerteten Graphen bestimme man den Entfernungsbaum bezüglich des Knotens v_0.



43. Gegeben seien die folgenden binären Operationen $\bullet$ auf der Menge A. Man untersuche die Operationen in Hinblick auf Assoziativität, Kommutativität sowie auf Existenz von neutralen oder inversen Elementen.

    (a) $A = \{-1,0,1\}$, $\bullet$ gewöhnliche Multiplikation

    (b) $A = \mathbb{N}$, $a \bullet b = 2^{ab}$

    (c) $A = \mathbb{Q}$, $a \bullet b = ab + 1$

    (d) $A = \mathbb{R}$, $a \bullet b = |a + b|$

    (e) $A \neq \emptyset$, $a \bullet b = b$

44. (a) Gegeben sind die Permutationen $\pi = (1346)$, $\rho = (134562)$ und $\sigma = (126)(35)$ der S_6. Man berechne $\pi\rho^{-1}\sigma^2$ und $\pi\rho\sigma^{-2}$.

    (b) Man schreibe die folgenden Permutationen in Zyklendarstellung bzw. als Produkt von Transpositionen und gebe deren Vorzeichen an:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 2 & 9 & 5 & 8 & 1 & 10 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

45. Man beweise die Gültigkeit der folgenden Rechenregeln in einer Gruppe $(G,\cdot)$ für beliebige $a,b,c \in G$:

    (i) $a\cdot b = a\cdot c \Rightarrow b = c$ (Kürzungsregel)

    (ii) $(a^{-1})^{-1} = a$

    (iii) $(a\cdot b)^{-1} = b^{-1}\cdot a^{-1}$

    (iv) Die Gleichung $a\cdot x = b$ ist in G stets eindeutig lösbar.

46. Sei G die Menge der Permutationen

$$\{(1), (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)\}.$$

    Man veranschauliche G, indem man die Permutationen auf die vier Eckpunkte eines Quadrates wirken lasse und als geometrische Operationen interpretiere. Man zeige mit Hilfe dieser Interpretation, dass G eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_4 ist (Symmetriegruppe des Quadrates) und bestimme alle Untergruppen.

47. In der Symmetriegruppe des Quadrats (vgl. Aufgabe 46.) bestimme man die Rechts- und Linksnebenklassenzerlegung nach einer (a) von einer Drehung, (b) von einer Spiegelung erzeugten Untergruppe.

48. Man zeige, dass die Menge $\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$ der von 0 verschiedenen Restklassen modulo 7 mit der Multiplikation eine zyklische Gruppe ist (Operationstafel) und bestimme alle ihre Untergruppen.

49. Es sei $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ die Menge der so genannten ganzen Gauß'schen Zahlen. Man zeige, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein Ring (ein Unterring der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$) ist. Ist $\mathbb{Z}[i]$ auch Integritätsring? Welche Elemente in $\mathbb{Z}[i]$ sind invertierbar?

50. Man ermittle Quotient und Rest für die beiden Polynome $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x + 1$ und $g(x) = x^2 + 4$ im Polynomring $\mathbb{Z}_5[x]$.

51. Man zeichne die Hassediagramme der beiden Teilerverbände T_{56} und T_{66}. Ist einer dieser Verbände eine Boole'sche Algebra?

52. Man zeige, dass die Menge $P_3(\mathbb{Q})$ aller Polynome $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ vom Grad kleiner gleich 3 mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{Q}$ einen Vektorraum über $\mathbb{Q}$ bildet. Man gebe ein Beispiel für drei Polynome vom Grad 3 an, welche linear abhängig sind, sowie drei Polynome vom Grad 3, welche linear unabhängig sind. Ferner gebe man zwei verschiedene Basen von $P_3(\mathbb{Q})$ an.

3 Lineare Algebra

53. Man zeige allgemein, dass jede quadratische Matrix A als Summe einer symmetrischen Matrix B (mit $B = B^T$) und einer schiefsymmetrischen Matrix C (mit $C = -C^T$) geschrieben werden kann. (Hinweis: Man wähle $B = (1/2)(A + A^T)$.) Wie sieht diese Zerlegung konkret für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

aus?

54. Man bestimme den Rang der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

55. Gegeben sei der Vektorraum $P_n(\mathbb{R})$ aller Polynome in x vom Grad kleiner gleich n mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$. Sei weiters eine Abbildung D definiert durch

$$D\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} .$$

Man überprüfe, ob D eine lineare Abbildung ist und bestimme gegebenenfalls die zugehörige Matrix bezüglich der Basis $\{x^0, x^1, \ldots, x^n\}$. Ist D injektiv oder surjektiv?

56. Sei f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $f(1,0)^T = f(2,3)^T = (1,-2)^T$. Man bestimme den Kern ker(f) und das Bild $f(\mathbb{R}^2)$ sowie den Defekt def(f) und den Rang rg(f) von f, und verifiziere die Beziehung def(f) + rg(f) = $\dim(\mathbb{R}^2)$. Wie lautet die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basis?

57. Man untersuche die Lösbarkeit folgender Gleichungssysteme und berechne gegebenenfalls alle ihre Lösungen:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & 5x_1 - x_2 = 12 & \text{(b)} & x_1 + 4x_2 = 0 \\ & -x_1 + 2x_2 = 12 & & 2x_1 - x_2 = 0 \\ \text{(c)} & -3x_1 + x_2 = 1 & \text{(d)} & 12x_1 + 9x_2 = 18 \\ & 9x_1 - 3x_2 = -2 & & 8x_1 + 6x_2 = 12 \end{array}$$

58. Man finde alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 2 \\ 5x_1 & +5x_2 & -2x_3 & +5x_4 & = & 3 \\ -x_1 & +4x_2 & +3x_3 & -3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & +4x_2 & & +x_4 & = & 1 \end{array}$$

59. Man bestimme alle Lösungen des nachstehenden Gleichungssystems (a) einmal über dem Körper $\mathbb{R}$ und (b) einmal über dem Körper $\mathbb{Z}_3$.

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 1 \\ x_1 & & +x_3 & -2x_4 & = & 1 \\ 7x_1 & & +x_3 & +x_4 & = & 7 \end{array}$$

60. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass A nichtsingulär ist und berechne A^{-1}. Schließlich ermittle man AA^{-1} sowie $A^{-1}A$.

61. Man berechne die folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 10 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & -2 & -8 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 8 & 12 \end{vmatrix}.$$

62. Man bestimme sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

63. Im $\mathbb{R}^3$ sei ein verallgemeinertes Skalarprodukt gegen durch $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \cdot G \cdot \vec{y}$ mit der Matrix

$$G = \begin{pmatrix} 13 & 0 & -5 \\ 0 & 9 & -6 \\ -5 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Für die Vektoren $\vec{x} = (1,2,3)^T$ und $\vec{y} = (3,-1,2)^T$ berechne man (a) die Längen von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ sowie (b) den Winkel φ zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$. (c) Ferner gebe man einen zu $\vec{x}$ orthogonalen Vektor an.