

# **DAS GAUSS'SCHE ELIMINATIONSVERFAHREN**

# Beispiel 1

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & & & + & x_4 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & - & 7x_4 & = & -1 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

# Beispiel 1

Elementare Zeilenumformungen durchführen:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -7 & -1 \end{array} \right)$$

# Beispiel 1

Elementare Zeilenumformungen durchführen:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -7 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \end{array} \right)$$

# Beispiel 1

Elementare Zeilenumformungen durchführen:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -7 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

# Beispiel 1

Elementare Zeilenumformungen durchführen:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -7 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

LGS ist lösbar wegen des Satzes von Kronecker-Capelli!

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -10 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

# Beispiel 1

Elementare Zeilenumformungen durchführen:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -7 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

LGS ist lösbar wegen des Satzes von Kronecker-Capelli!

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -10 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \text{ d.h., } \begin{array}{rcl} x_1 & - & 10x_3 + 13x_4 = 7 \\ x_2 & + & 4x_3 - 5x_4 = -2 \end{array}$$

# Beispiel 1

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -10 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \text{ d.h., } \begin{array}{rcl} x_1 & - & 10x_3 + 13x_4 = 7 \\ x_2 & + & 4x_3 - 5x_4 = -2 \end{array}$$

Alle Lösungen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



# Beispiel 1

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -10 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \text{ d.h., } \begin{array}{rcl} x_1 & - & 10x_3 + 13x_4 = 7 \\ x_2 & + & 4x_3 - 5x_4 = -2 \end{array}$$

Alle Lösungen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -13 \\ -4 & 5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

## Beispiel 2

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7$$

$$19x_1 + 27x_2 + 31x_3 = 51$$

## Beispiel 2

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7$$

$$19x_1 + 27x_2 + 31x_3 = 51$$

Erweiterte Systemmatrix

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 19 & 27 & 31 & 51 \end{array} \right)$$

## Beispiel 2

$$\begin{aligned}3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\19x_1 + 27x_2 + 31x_3 &= 51\end{aligned}$$

Erweiterte Systemmatrix

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 19 & 27 & 31 & 51 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & 11 \\ 0 & 5 & 55 & 58 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

## Beispiel 2

$$\begin{aligned}3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\19x_1 + 27x_2 + 31x_3 &= 51\end{aligned}$$

Erweiterte Systemmatrix

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 19 & 27 & 31 & 51 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & 11 \\ 0 & 5 & 55 & 58 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

unlösbar!

## Beispiel 3

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

## Beispiel 3

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{array} \right)$$

## Beispiel 3

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & -5 & -2 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \end{array} \right)$$

$$x_3 = \frac{2}{5}, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = -\frac{1}{5} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$



## Beispiel 4

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 & = & 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_4 & = & -6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 & = & 0 \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

## Beispiel 4

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 & = & 1 \\ 2x_1 - 3x_2 & + & 2x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 & = & 0 \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 14 & 6 & 8 \end{array} \right) \longrightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{s_3 \leftrightarrow s_4} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

## Beispiel 4

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 & = & 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_4 & = & -6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 & = & 0 \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 14 & 6 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{s_3 \leftrightarrow s_4} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} x_3 = \lambda, \\ x_4 = -1, \\ x_2 = 2 - 2\lambda, \\ x_1 = 1 - 3\lambda \end{array} \implies \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 - 3\lambda \\ 2 - 2\lambda \\ \lambda \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# DETERMINANTEN

# Berechnung von Determinanten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

# Berechnung von Determinanten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 12 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

# Berechnung von Determinanten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 12 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \xrightarrow{\substack{z_3 \rightarrow z_3 - 2z_2 \\ z_4 \rightarrow 3z_4 - 2z_2 \text{ (!)}}} \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} \end{array}$$

# Berechnung von Determinanten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 12 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \xrightarrow{\substack{z_3 \rightarrow z_3 - 2z_2 \\ z_4 \rightarrow 3z_4 - 2z_2 \text{ (!)}}} \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\implies \det A = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8}{3} = 16$$